А. А. ЗАСЛАВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Москва
МЦНМО
2004

УДК 514.112
ББК 22.151.0
З36

Заславский А. А.

З36 Геометрические преобразования. — М.: МЦНМО, 2004. — 86 с.
2-е изд., стереотипное.

ISBN 5-94057-094-1

В книге изложены элементы теории геометрических преобразований. Рассмотрены движения плоскости, преобразования подобия, аффинные, круговые и проективные преобразования. Описано построение моделей геометрии Лобачевского с помощью проективных и круговых преобразований.

Пособие написано на основе спецкурса, который вел автор в гимназии № 1543. Оно предназначено как для преподавателей, так и для учащихся старших классов.

ББК 22.151.0

Алексей Александрович Заславский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Художник Н. Шихова.

Обложка Н. Суворовой.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 26.03.2004 г. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная. Объем 5,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-094-1

Введение

В современных школьных программах понятию геометрического преобразования отводится достаточно скромное место: школьникам дают определения таких преобразований как поворот, параллельный перенос, симметрия, иногда инверсия, и показывают, что эти преобразования могут быть полезны при решении определенных задач.

Между тем, понятие преобразования является для геометрии ключевым. Строго говоря, само определение геометрии требует его использования. Насколько мне известно, систематическое изложение теории геометрических преобразований на уровне старших классов было дано только в двухтомнике И. М. Яглома «Геометрические преобразования», вышедшем в серии «Библиотека математического кружка» более 40 лет назад и давно ставшем библиографической редкостью. Данное пособие фактически воспроизводит структуру и в определенной степени содержание этой замечательной книги, хотя многие задачи являются более поздними.

Пособие написано на основе спецкурса, который автор вел в гимназии № 1543 начиная с 1995 г., и предназначено как для преподавателей, так и для учащихся старших классов математических школ. Первые четыре главы посвящены различным типам преобразований. Каждый параграф содержит основные теоремы, ряд задач с решениями и комментарии к наиболее типичным задачам. Главы 5, 6, 7 являются дополнительными и посвящены решению задач на построение, связи геометрических преобразований с комплексными числами и построению с помощью проективных и круговых преобразований моделей геометрии Лобачевского. В списке литературы приведены источники, из которых взята большая часть задач. К сожалению, я не имею возможности указать авторов задач, так как они мне известны лишь в отдельных случаях.

Автор выражает благодарность Б. П. Гейдману, по инициативе которого была написана эта работа, и А. В. Хачатуряну, который не только высказал ряд весьма полезных замечаний, но и оказал неоценимую помощь по подготовке рукописи к печати.

Глава 1

Движение и подобие

1.1. Определение и примеры движений

Прежде чем давать определение движения, зададимся вопросом: что изучает геометрия? Стандартный ответ, что геометрия изучает свойства геометрических фигур, является безусловно правильным, но неполным, так как геометрия изучает не все, а только некоторые свойства фигур. Попытавшись уточнить эти свойства, мы в конце концов придем к выводу, что они связаны с расстояниями между различными точками фигуры. Точнее, если можно установить взаимно однозначное соответствие между точками фигур F и G, при котором расстояние между любыми двумя точками фигуры F равно расстоянию между соответствующими им точками фигуры G, то геометрические свойства этих фигур не различаются. Поэтому естественным представляется следующее определение.

Определение. **Движением** называется преобразование (т. е. взаимно однозначное отображение плоскости на себя), при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами.

Из определения сразу вытекают свойства движений.

1. Движение переводит любую прямую в прямую.

Доказательтво. Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Тогда $AB+BC=AC$. Из определения движения следует, что образы A', B', C' точек A, B, C удовлетворяют условию $A'B'+B'C'=A'C'$, т. е. точки A', B', C' также лежат на одной прямой.

2. Движение переводит любой угол в равный угол.

Доказательство. Из предыдущего свойства следует, что $\angle AOB$ переходит при движении в $\angle A'O'B'$, где A', O', B' — образы точек A, O, B. Но треугольники AOB и $A'O'B'$ равны по трем сторонам, следовательно, $\angle AOB=\angle A'O'B'$.

3. Композиция (последовательное применение) двух движений есть движение.

4. Преобразование, обратное движению, есть движение.

5. Тождественное преобразование (преобразование, оставляющее каждую точку на месте) есть движение.

Доказательства свойств 3—5 очевидны. Совокупность преобразований, удовлетворяющая свойствам 3—5, называется **группой**. Таким образом, движения плоскости образуют группу. Рассмотрим примеры движений.

1.1.1. Параллельный перенос

Определение. **Параллельным переносом** на вектор $\overrightarrow{n}$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{n}$. То, что параллельный перенос является движением, почти очевидно. Действительно, если точки A, B переходят соответственно в A', B', то из определения параллельного переноса следует, что $AA'B'B$ — параллелограмм и $AB = A'B'$. Отметим, что фактически мы доказали более сильное свойство.

Утверждение. При параллельном переносе любой вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит в равный вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

Следствие. При параллельном переносе любая прямая переходит в параллельную прямую. Отметим еще два свойства параллельных переносов, непосредственно вытекающие из определения.

1. Композиция параллельных переносов на векторы $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ есть параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{m+n}$.

2. Преобразование, обратное к параллельному переносу на вектор $\overrightarrow{n}$ есть параллельный перенос на вектор $-\overrightarrow{n}$. Таким образом, множество всех параллельных переносов является группой.

Задача 1. Даны две пересекающиеся прямые a и b и отрезок CD. Построить параллелограмм $ABCD$, вершины A и B которого лежат соответственно на a и b.

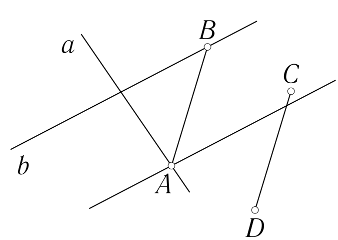

Рис. 1

Решение. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, следовательно, при переносе на вектор $\overrightarrow{DC}$ точка A перейдет в точку B. Но образ точки A должен принадлежать образу прямой a, и, значит, точка B является точкой пересечения прямой b с прямой a', в которую переходит прямая a при указанном переносе. Так как прямые a и b по условию пересекаются,

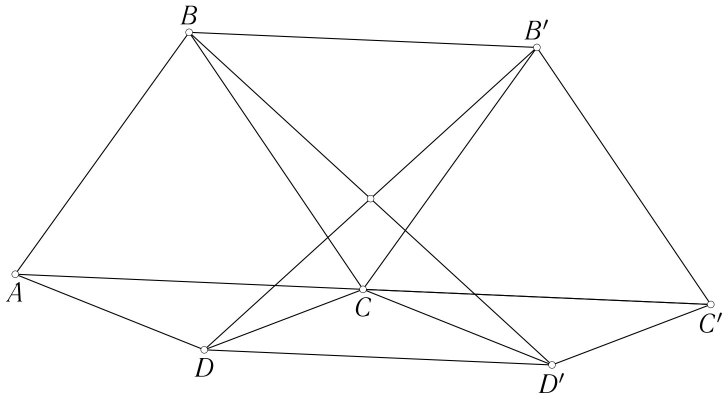

Рис. 2

а прямые a и a' параллельны, задача всегда имеет единственное решение (рис. 1).

Задача 2. Доказать, что среди всех четырехугольников с заданными диагоналями и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.

Р е ш е н и е. Перенесем четырехугольник $ABCD$ на вектор $\overrightarrow{AC}$. Получим четырехугольник $A'B'C'D' = CB'C'D'$, где $BB'D'D$ — параллелограмм, стороны которого равны диагоналям исходного четырехугольника и угол между сторонами равен углу между диагоналями. Периметр четырехугольника равен $AB + BC + CD + AD = CD' + BC + CD + B'C$. Но $BC + CD' \geqslant BD'$ и $B'C + CD \geqslant B'D$, причем равенства достигаются, только если $ABCD$ — параллелограмм (рис. 2).

Задача 3. В каком месте следует построить мост через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь между ними был кратчайшим? Берега реки — параллельные прямые, а мост им перпендикулярен.

Задача 4. Даны две окружности и отрезок MN. Построить параллелограмм $ABCD$, вершины A и B которого лежат на одной окружности, вершины C и D на другой, $BC = MN$, $BC \parallel MN$.

Задача 5. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, касающуюся данных прямых и проходящую через данную точку.

1.1.2. Поворот

О п р е д е л е н и е. **Поворотом** вокруг точки O на угол φ называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что $OA = OA'$ и угол между лучами OA и OA' (т. е. угол, отсчитываемый против часовой стрелки от луча OA к лучу OA') равен φ.

Утверждение. Поворот является движением.

Доказательство. Пусть точки A, B переходят соответственно в точки A', B'. Так как $\angle AOA' = \angle BOB'$, мы заключаем, что $\angle AOB = \angle A'OB'$. Поэтому треугольники AOB и $A'OB'$ равны по двум сторонам и углу между ними, и, значит, $AB = A'B'$. Очевидно, что поворот на угол 2π является тождественным преобразованием. Поэтому всегда можно считать, что $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Отметим свойства поворота.

1. Если прямая a при повороте на угол φ переходит в прямую a', то один из углов между a и a' равен φ при $0 \leqslant \varphi < \pi$ и $\varphi - \pi$ при $\pi \leqslant \varphi < 2\pi$.

Доказательство. Если прямая a проходит через центр поворота O, утверждение очевидно. В противном случае опустим на a перпендикуляр OA и построим образ A' точки A. Так как движения сохраняют величины углов, образом прямой a будет прямая a', проходящая через A' и перпендикулярная OA'. Из свойств углов с перпендикулярными сторонами вытекает искомое свойство (рис. 3).

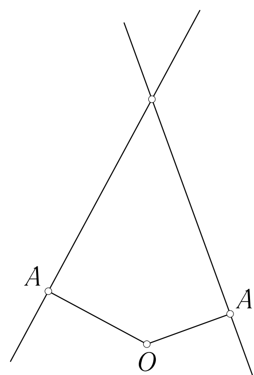

Рис. 3

2. Композиция поворотов вокруг точки O на углы α и β есть поворот вокруг O на угол $\alpha + \beta$ (или $\alpha + \beta - 2\pi$).

3. Преобразование, обратное к повороту вокруг точки O на угол φ, есть поворот вокруг O на угол $2\pi - \varphi$.

Свойства 2–3 непосредственно следуют из определения поворота. Они означают, что все повороты с данным центром образуют группу. Поворот на угол π называется центральной симметрией. Из свойства 1 вытекает, что центральная симметрия переводит любую прямую в параллельную.

Задача 6. Дан угол и точка O внутри него. Провести через O прямую так, чтобы отрезок, высекаемый на ней сторонами угла, делился точкой O пополам.

Решение. Пусть AB — искомый отрезок. При центральной симметрии с центром O точка A переходит в B. Следовательно, точка B является пересечением одной стороны угла с образом другой при центральной симметрии относительно O. Задача всегда имеет единственное решение (рис. 4).

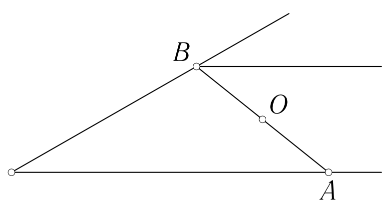

Рис. 4

Задача 7. В круге проведена ломаная, делящая его площадь пополам. Доказать, что ее длина не меньше диаметра круга.

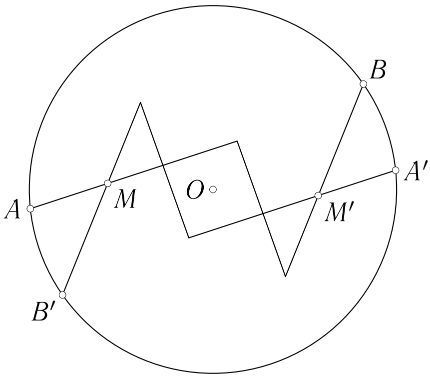

Рис. 5

Р е ш е н и е. Пусть A, B — концы данной ломаной, A', B' — концы ломаной, центрально-симметричной ей относительно центра круга. Так как обе ломаных делят площадь круга пополам, они обязательно пересекаются. Пусть M — первая точка пересечения при движении от A к B, M' — симметричная точка пересечения. Рассмотрим части ломаной AM и $M'B$ и выберем из них более короткую (для определенности предположим, что это AM). Ломаная $AMM'A'$, состоящая из части исходной ломаной AM, отрезка MM' и части симметричной ломаной $M'A'$, короче исходной, но длиннее диаметра AA' (рис. 5).

Задача 8. Даны прямые a и b и точка O. Построить равносторонний треугольник OAB, вершины A и B которого лежат на прямых a и b соответственно.

Задача 9. В треугольнике ABC, все углы которого меньше $2\pi/3$, найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Задача 10. Даны две пересекающиеся окружности. Провести прямую через точку их пересечения так, чтобы длины высекаемых ею хорд были равны.

Задача 11. На сторонах AC и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ACMN$ и $BCPQ$. Доказать, что медиана CK треугольника MCP перпендикулярна отрезку AB и вдвое его короче.

1.1.3. Симметрия

О п р е д е л е н и е. **Симметрией** относительно прямой l называется преобразование, переводящее каждую точку A в такую точку A', что прямая l перпендикулярна отрезку AA' и проходит через его середину.

У т в е р ж д е н и е. Симметрия является движением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки A, B переходят в A', B'. Рассмотрим три случая. 1. Отрезок AB параллелен прямой l. Тогда $AB = A'B'$, так как $ABB'A'$ — прямоугольник. 2. Отрезок AB перпендикулярен прямой l.

Искомое равенство получается непосредственным вычислением. 3. Отрезок AB непараллелен и неперпендикулярен прямой l. Опустим на прямую BB' перпендикуляры AC и $A'C'$. Нетрудно убедиться, что точки C и C' симметричны относительно l. Из рассмотрения двух первых случаев следует, что $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Поэтому $AB = A'B'$ как гипотенузы равных треугольников ABC и $A'B'C'$ (рис. 6).

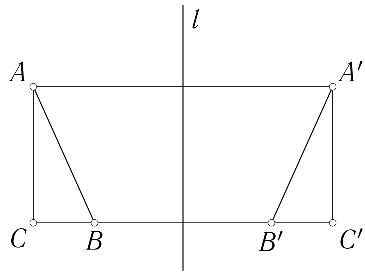

Рис. 6

Отметим важное отличие симметрии от движений, рассмотренных выше. Пусть в треугольнике ABC вершины A, B, C следуют друг за другом при обходе треугольника против часовой стрелки. Поворот и параллельный перенос переводят ABC в треугольник $A'B'C'$ с тем же порядком вершин, при симметрии же вершины A', B', C' следуют друг за другом при обходе по часовой стрелке. Преобразования, сохраняющие порядок вершин треугольника, называются преобразованиями, **сохраняющими ориентацию**, или **собственными**, не сохраняющие — **меняющими ориентацию** или **несобственными**. Второе название объясняется тем, что перевести фигуру в симметричную, не выводя ее из плоскости, невозможно. Таким образом, поворот и параллельный перенос являются собственными движениями, а симметрия несобственным. Нетрудно убедиться, что композиция двух собственных или двух несобственных движений является собственным движением, а композиция собственного и несобственного движений — несобственным. Преобразование, обратное к собственному или несобственному, является преобразованием того же типа. Следовательно, собственные движения образуют группу. Рассмотрим задачи, связанные с понятием симметрии.

Задача 12. Найти композицию симметрий относительно прямых a и b, пересекающихся в точке O.

Р е ш е н и е. Очевидно, что точка O остается неподвижной. Пусть симметрия относительно a переводит произвольную точку C в точку C', а симметрия относительно b переводит C' в C''. Обозначим середины отрезков CC' и $C'C''$ соответственно через A и B. Очевидно, что $OC = OC' = OC''$ и $\angle COC'' = 2\angle AOB$ (AO и BO — биссектрисы углов COC' и $C'OC''$). Таким образом, искомой композицией будет поворот вокруг O на удвоенный угол между прямыми a и b, отсчитываемый от a к b против часовой стрелки (рис. 7). Отметим, что при таком определении угла угол между прямыми b и a равен не углу между a и b, а смежному с ним, поэтому композиция двух симметрий зависит от порядка их выполнения.

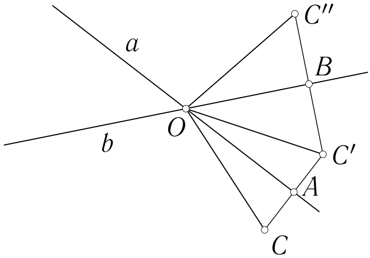

Рис. 7

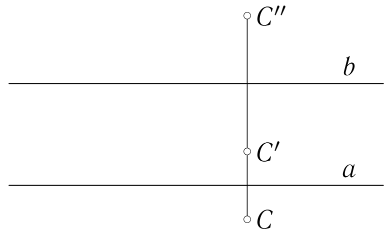

Рис. 8

Задача 13. Найти композицию симметрий относительно двух параллельных прямых.

Р е ш е н и е. Рассуждая аналогично предыдущей задаче, получаем, что искомая композиция будет параллельным переносом на вектор, перпендикулярный данным прямым. Длина вектора равна удвоенному расстоянию между прямыми, а его направление зависит от порядка выполнения симметрий (рис. 8).

Задача 14. На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC выбрать точки A', B', C', так чтобы периметр треугольника $A'B'C'$ был наименьшим.

Р е ш е н и е. Построим точки C_1 и C_2, симметричные точке C' относительно CA и CB. Периметр треугольника $A'B'C'$ равен длине ломаной $C_1B'A'C_2$ и, следовательно, не меньше длины отрезка C_1C_2 (рис. 9). Но, как было показано, $CC_1 = CC' = CC_2$, а $\angle C_1CC_2 = 2\angle ACB$, т. е. этот угол не зависит от выбора точки C'. Поэтому отрезок C_1C_2 имеет наименьшую

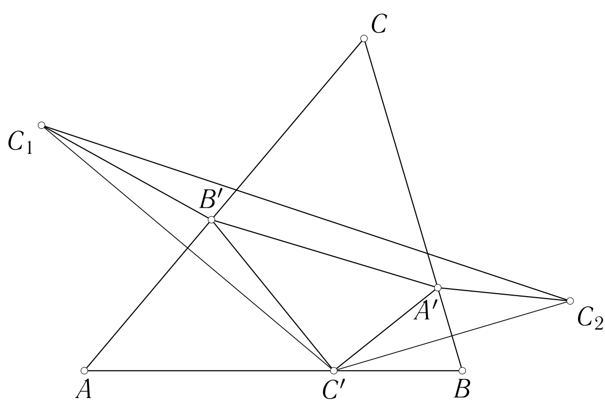

Рис. 9

длину, когда точка C' является основанием опущенной на AB высоты. Нетрудно проверить, что A', B' также будут основаниями соответствующих высот.

Задача 15. В треугольнике известны одна сторона и сумма двух других. Найти среди всех таких треугольников треугольник наибольшей площади.

Задача 16. Дорога AB пересекает реку BC под острым углом. Гонец находится в точке P внутри угла ABC. Гонцу надо напоить коня и выехать на дорогу. Найти кратчайший путь.

Задача 17. Треугольник $A'B'C$ получен из равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) поворотом вокруг вершины C на угол, меньший чем угол ACB. Пусть K — точка пересечения прямых AB и $A'B'$. Доказать, что CK — биссектриса угла ACB'.

1.2. Классификация движений

В предыдущем разделе рассматривались примеры движений. Сейчас мы покажем, что рассмотренными примерами множество всех движений фактически исчерпывается. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема Шаля. Любое движение является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо симметрией, либо композицией симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии (последний вид движения называется **скользящей симметрией**).

Доказательство. Прежде всего сформулируем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Даны две пары точек A, B и A', B', причем $AB = A'B' > 0$. Существуют ровно два движения, переводящие A в A', а B в B', одно из которых сохраняет ориентацию, а другое меняет.

Это утверждение часто называют леммой о двух гвоздях. Для его доказательства достаточно заметить, что если произвольная точка C лежит на прямой AB, то ее образ C' определяется однозначно, если же C не лежит на прямой AB, то она может перейти в одну из двух точек пересечения окружностей с центрами в A' и B' и радиусами соответственно AC и BC (рис. 10). Если выбрать одну из этих точек, образы всех остальных определяются однозначно, так

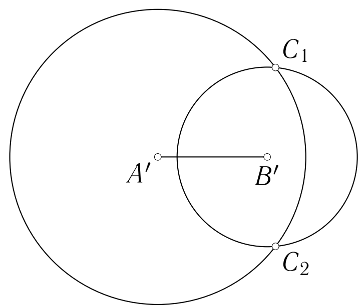

Рис. 10

как любое движение переводит точки C и D, лежащие по одну сторону от прямой AB, в точки C' и D', лежащие по одну сторону от $A'B'$, а точки, лежащие по разные стороны от AB, в точки, лежащие по разные стороны от $A'B'$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Шаля. Пусть g — движение, отличное от тождественного (тождественное преобразование можно считать переносом на нулевой вектор). Тогда найдется точка A, не совпадающая со своим образом. Пусть $B = g(A)$, $C = g(B)$. Возможны три случая.

1. Точки A, B, C не лежат на одной прямой, т. е. образуют равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, M, N — середины сторон AB, BC. Поворот вокруг O на угол AOB переводит A в B, а B в C. Тем же свойством обладает композиция симметрии относительно прямой MN и параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{MN}$. По лемме данное движение совпадает с одним из указанных, т. е. является либо поворотом, либо скользящей симметрией (рис. 11).

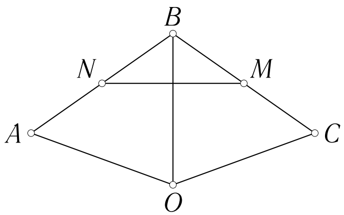

Рис. 11

2. Точка C лежит на прямой AB и не совпадает с A. Тогда B — середина отрезка AC, и данное движение есть либо перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$, либо композиция этого переноса и симметрии относительно AB, т. е. скользящая симметрия.

3. Точки C и A совпадают. Данное движение есть либо центральная симметрия относительно середины O отрезка AB, либо симметрия относительно прямой, проходящей через O и перпендикулярной отрезку AB. Теорема доказана.

Рассмотрим задачи, решаемые с помощью теоремы Шаля.

Задача 18. Найти композицию поворота на угол φ и параллельного переноса.

Р е ш е н и е. Из доказанных ранее свойств поворота и переноса следует, что при их композиции угол между любой прямой и ее образом равен φ (или $\varphi - \pi$). Из всех типов движений этим свойством обладает только поворот. Следовательно, искомая композиция также будет поворотом на угол φ. Центр этого поворота можно найти с помощью результатов задач 12, 13. Представим поворот в виде композиции симметрий относительно прямых a и b, причем прямую b выберем перпендикулярной вектору параллельного переноса. Перенос представим в виде композиции симметрий относительно параллельных прямых b и c. Поскольку двукратная симметрия относительно b будет тождественным преобразованием, искомое преобразование будет композицией симметрий относительно a и c, т. е. поворотом вокруг точки их пересечения.

Задача 19. Найти композицию двух поворотов с различными центрами.

Решение. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, получаем, что искомая композиция будет поворотом на угол, равный сумме углов данных поворотов, если эта сумма не равна 2π, и параллельным переносом в противном случае. Определение центра поворота или вектора переноса не представляет сложностей.

Задача 20. От каждой стороны квадрата осталось по одной точке. Восстановите квадрат.

Решение. Пусть даны точки K, L, M, N, лежащие соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. При повороте на угол $\pi/2$ вокруг центра квадрата точка K перейдет в точку K' на стороне BC, а точка M — в точку M' на стороне DA. Если затем совершить параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{K'L}$, точка M' перейдет в точку M'', также лежащую на DA (рис. 12). Следовательно, прямая DA совпадает с прямой $M''N$. Но композиция поворота и параллельного переноса есть поворот на тот же угол, поэтому задача сводится к нахождению поворота на угол $\pi/2$, переводящего K в L. Для этого достаточно последовательно осуществить поворот с произвольным центром и соответствующий параллельный перенос. Отметим, что, если отрезки KM и LN равны и перпендикулярны друг другу, точки M'' и N совпадут. В этом случае задача имеет бесконечное множество решений: можно провести произвольную пару параллельных прямых через точки K и M и пару прямых, перпендикулярных им, через L и N, и эти четыре прямые образуют квадрат. В остальных случаях решение единственно.

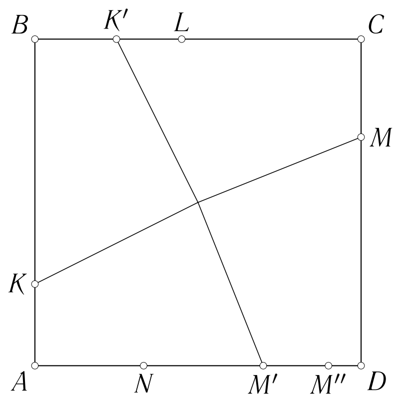

Рис. 12

Задача 21. Доказать, что любое движение можно представить в виде композиции не более чем трех симметрий.

Задача 22. Стороны четырехугольника проходят через вершины параллелограмма (на каждой стороне лежит одна вершина). Доказать, что если три стороны делятся соответствующими вершинами пополам, то и четвертая делится пополам.

Задача 23. Построить выпуклый пятиугольник по серединам его сторон.

1.3. Определение и свойства подобия

Как было отмечено выше, важность понятия «движение» для геометрии вызвана тем фактом, что фигуры, переводимые друг в друга движениями, с геометрической точки зрения неразличимы. Однако практически во всех теоремах и задачах геометрии изучаются свойства фигур, зависящие лишь от их формы, но не от размера. Собственно, само понятие размера приобретает смысл лишь после выбора определенных единиц измерения длины, площади и т. д., а выбор этих единиц, естественно, не должен влиять на геометрические выводы. В связи с этим имеет смысл рассматривать преобразования следующего вида.

Определение. **Подобием** называется преобразование, при котором для любых двух точек A и B отношение расстояний между их образами A' и B' к расстоянию между самими точками равно одному и тому же числу: $A'B' = k \cdot AB$. Число $k > 0$ называется **коэффициентом подобия**. Из определения сразу следует, что подобия образуют группу. Действительно, композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 будет подобием с коэффициентом k_1k_2, а преобразование, обратное подобию с коэффициентом k, — подобием с коэффициентом $1/k$. Важным частным случаем подобия является гомотетия.

Определение. **Гомотетией** с центром в точке O и коэффициентом k, отличным от нуля, называется преобразование, переводящее каждую точку A в точку A', лежащую на прямой OA и удовлетворяющую условию $OA' = k \cdot OA$. При $k > 0$ точки A и A' лежат по одну сторону от точки O, при $k < 0$ по разные. Отметим, что гомотетия с коэффициентом $k = -1$ является центральной симметрией. То, что гомотетия является подобием, почти очевидно. Действительно, если точки A, B переходят в точки A', B', то треугольники OAB и $OA'B'$ подобны и, значит, $A'B' = k \cdot AB$ (рис. 13). С другой стороны, если дано произвольное подобие

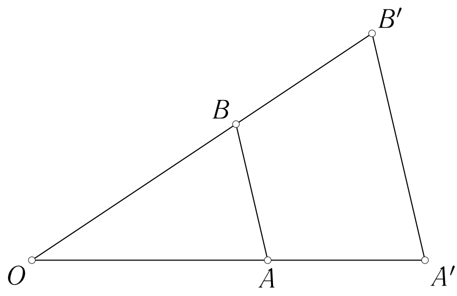

Рис. 13

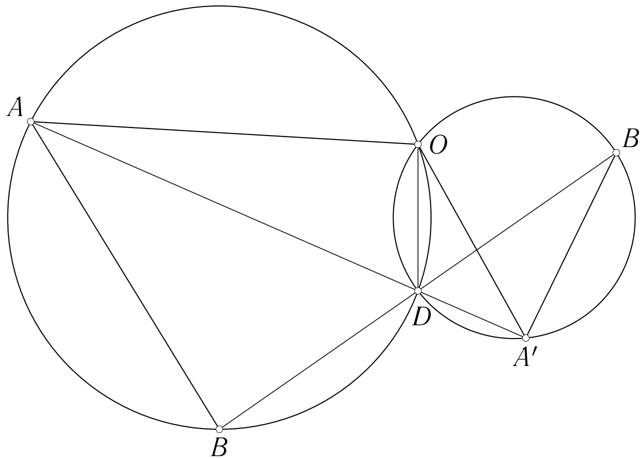

Рис. 14

с коэффициентом k, то композиция этого подобия и гомотетии с произвольным центром и коэффициентом $1/k$ будет движением. Поэтому данное подобие можно представить как композицию этого движения и гомотетии с центром O и коэффициентом k. При этом за счет выбора центра гомотетии можно добиться того, что движение будет иметь достаточно простой вид. А именно, верны следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. Любое подобие, сохраняющее ориентацию, с коэффициентом k, отличным от 1, является композицией гомотетии с центром в некоторой точке O и коэффициентом k и поворота вокруг точки O (иногда такое преобразование называется **спиральным подобием**).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что справедливо утверждение, обобщающее лемму о двух гвоздях: для любых двух пар различных точек A, B и A', B' существует ровно два подобия, переводящих A в A', а B в B'. Коэффициент этих подобий равен $k = \dfrac{A'B}{AB}$, одно из них сохраняет ориентацию, а другое меняет. Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство леммы. Пусть теперь данное подобие переводит точки A, B в A', B'. Если отрезки AB и $A'B'$ параллельны, данное подобие является гомотетией с центром в точке D пересечения прямых AA' и BB' (точки A и B можно выбрать так, чтобы эти прямые не совпадали). В противном случае опишем окружности вокруг треугольников ABD и $A'B'D$ и найдем вторую точку O их пересечения (если окружности касаются, точки O и D совпадают). Рассмотрев различные случаи расположения точек A, B, A', B', O, D и сравнив углы OAB,

ODB, ODB', $OA'B'$, убеждаемся, что углы OAB и $OA'B'$ равны (рис. 14). Аналогично равны углы OBA и $OB'A'$, и, значит, композиция гомотетии с центром O и коэффициентом k и поворота вокруг точки O на угол AOA' переводит A в A', а B в B', т. е. совпадает с данным подобием. Теорема доказана.

Теорема 2. Любое подобие с коэффициентом не равным 1, меняющее ориентацию, можно представить в виде композиции гомотетии с центром в некоторой точке O и симметрии относительно прямой, проходящей через O.

Доказательство. Покажем прежде всего, что данное подобие имеет неподвижную точку. Из теоремы Шаля следует, что оно является композицией гомотетии с центром в произвольной точке и скользящей симметрии. Но композиция гомотетии и параллельного переноса в силу предыдущей теоремы будет гомотетией с тем же коэффициентом, поэтому достаточно рассмотреть подобие, являющееся композицией гомотетии с центром в точке M и коэффициентом k и симметрии относительно прямой l, не проходящей через M. Проведем через M прямую, перпендикулярную прямой l, и введем на ней координаты, так чтобы координата точки M была равна нулю, а координата точки ее пересечения с l единице. Гомотетия с центром в M переводит точку с координатой x в точку с координатой kx, а симметрия относительно l переводит точку с координатой kx в точку с координатой $2-kx$. Уравнение $x=2-kx$ имеет единственное решение, определяющее неподвижную точку O. Возьмем теперь произвольную точку A, отличную от O, и ее образ A'. Композиция гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k и симметрии относительно биссектрисы угла AOA' переводит A в A' и оставляет O на месте, т. е. совпадает с данным подобием (рис. 15). Теорема доказана.

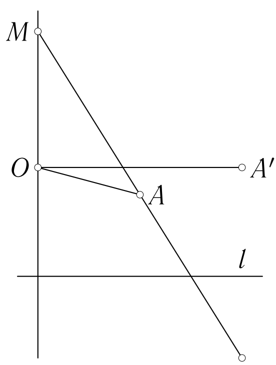

Рис. 15

Из теорем 1, 2 следует, что любое подобие, не являющееся движением, имеет ровно одну неподвижную точку. Рассмотрим несколько задач на подобие.

Задача 24. Найти геометрическое место середин хорд окружности, проходящих через данную точку A.

Решение. Пусть B' — середина хорды AB. Гомотетия с центром в A и коэффициентом $1/2$ переводит B в B'. Поэтому искомым геометрическим местом будет образ данной окружности при этой гомотетии, т. е. окружность вдвое меньшего радиуса, касающаяся данной в точке A (рис. 16).

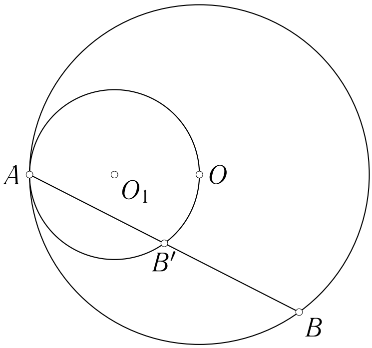

Рис. 16

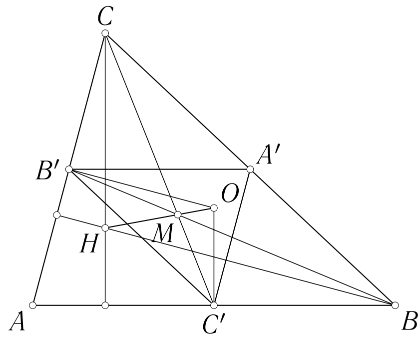

Рис. 17

Задача 25. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC центр тяжести M, ортоцентр H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем точка M расположена между O и H и $MR = 2 \cdot OM$.

Р е ш е н и е. Пусть A', B', C' — середины сторон BC, CA, AB. Так как отрезки AB и $A'B'$ параллельны, подобие, переводящее треугольник ABC в $A'B'C'$, является гомотетией с центром M и коэффициентом $-1/2$. Точка H при этой гомотетии переходит в ортоцентр треугольника $A'B'C'$, совпадающий с O (рис. 17).

Задача 26. Дан угол и точка внутри него. Построить окружность, вписанную в угол и проходящую через данную точку.

Р е ш е н и е. Построим произвольную окружность, вписанную в данный угол, и найдем точку M' ее пересечения с прямой, соединяющей вершину угла O и данную точку M. Гомотетия с центром O и коэффициентом $k = \dfrac{OM'}{OM}$ переводит точку M' в M, а построенную окружность в искомую. Так как прямая и окружность пересекаются в двух точках, задача имеет два решения (рис. 18).

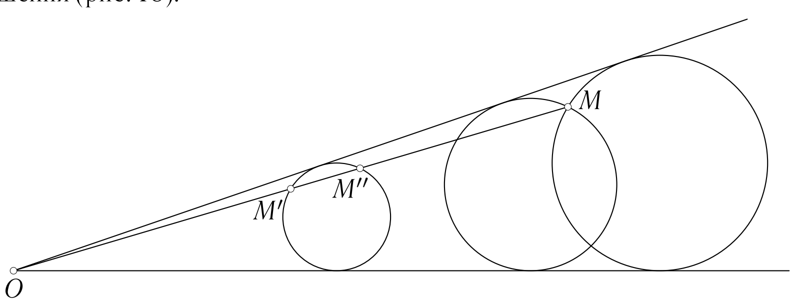

Рис. 18

Задача 27. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны и одинаково ориентированы. Треугольники $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ также подобны и одинаково ориентированы. Доказать, что треугольник $A''B''C''$ подобен треугольнику ABC (*теорема Шута—Петерсона*).

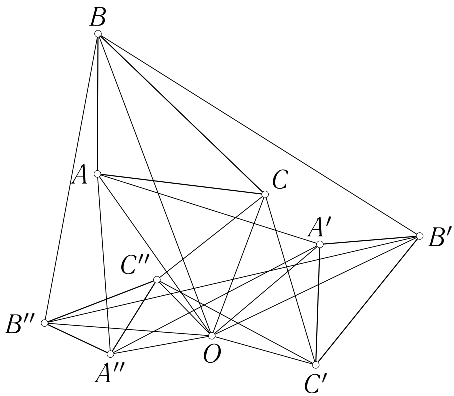

Рис. 19

Решение. Пусть O — неподвижная точка подобия, переводящая треугольник ABC в $A'B'C'$. Тогда $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$ и углы AOA', BOB', COC' равны. Поэтому треугольники OAA', OBB', OCC' подобны. Отсюда и из подобия треугольников $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ следует равенство отношений $\frac{OA''}{OA}$, $\frac{OB''}{OB}$, $\frac{OC''}{OC}$ и углов AOA'', BOB'', COC''. Соответственно композиция гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{OA''}{OA}$ и поворота вокруг точки O на угол AOA'' переводит треугольник ABC в $A''B''C''$ (рис. 19).

Задача 28. Даны окружность и точки A, B на ней. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников ABC, где C — произвольная точка окружности.

Задача 29. Даны две концентрические окружности. Провести через данную точку большей окружности хорду, делящуюся меньшей окружностью на три равные части.

Задача 30. Дан острый угол AOB и точка C внутри него. Найти на стороне OB точку, равноудаленную от C и OA.

Задача 31. Построить треугольник по трем медианам.

Задача 32. Построить треугольник по трем высотам.

Задача 33. В данный треугольник вписать квадрат, т. е. найти две точки на основании и по одной на боковых сторонах, являющиеся вершинами квадрата.

Задача 34. На одной стороне листа начерчена карта Москвы, а на другой в более крупном масштабе карта центра. Можно ли проколоть лист так, чтобы на обеих сторонах точка прокола изображала одно и то же место?

Глава 2

Аффинные преобразования

В первой главе были рассмотрены преобразования движения и подобия. Особая роль этих преобразований в геометрии объясняется, как было показано, тем, что они оставляют неизменными все существенные свойства геометрических фигур. Можно сказать, что та геометрия, которую изучают в школе, является геометрией подобия. Вместе с тем, существуют геометрические теоремы и задачи, существенными для которых являются лишь некоторые свойства геометрических фигур, сохраняющиеся не только при подобии, но и при других преобразованиях. Понимание этого факта и знание свойств соответствующих преобразований может существенно облегчить решение таких задач. В частности, ряд задач эффективно решается методами так называемой аффинной геометрии, изучающей свойства фигур, не меняющиеся при аффинных преобразованиях. Прежде чем дать точное определение этому понятию, рассмотрим следующий пример. Предположим, что некоторый чертеж, сделанный на стекле, освещается солнцем (солнечные лучи считаются параллельными), в результате чего на стене возникает изображение этого чертежа. Если плоскости стекла и стены параллельны, изображение в точности повторяет чертеж, но в противном случае оно может подвергаться значительным искажениям. Например, равные отрезки могут перейти в неравные, не сохраняются величины углов и т. д. Однако можно выделить ряд свойств чертежа, которые сохраняются и на изображении. Основным из этих свойств можно считать то, что любой прямой чертежа соответствует прямая на изображении, причем параллельным прямым соответствуют параллельные. Именно это свойство принимается за основу следующего определения.

Определение. **Аффинным** называется преобразование плоскости, переводящее каждую прямую в прямую и параллельные прямые в параллельные.

Из определения сразу вытекает, что аффинные преобразования образуют группу, в которую входят, в частности, все подобия. Однако подобиями эта группа не исчерпывается, что показывает следующая теорема.

Теорема 1. Для любых данных треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C'.

Доказательство. На прямой AC отметим все точки, расстояние от которых до точки C кратно длине отрезка AC, и проведем через них прямые, параллельные BC. Аналогично на прямой BC отметим точки, расстояние от которых до C кратно BC, и проведем через них прямые, параллельные AC. В результате вся плоскость разобьется на параллелограммы со сторонами, равными AC и BC, и углом, равным углу ACB. Докажем, что вершины этих параллелограммов переходят в вершины параллелограммов, построенных аналогичным образом по треугольнику $A'B'C'$. Действительно, четвертая вершина D параллелограмма с вершинами A, B, C перейдет в четвертую вершину D' параллелограмма с вершинами A', B', C', так как прямые AD и BD, параллельные прямым BC и AC, перейдут в прямые $A'D'$ и $B'D'$, параллельные прямым $B'C'$ и $A'D'$. Прямая, проходящая через D параллельно AB, перейдет в прямую, проходящую через D' параллельно $A'B'$, а ее точки пересечения с AC и BC, являющиеся вершинами параллелограммов первой решетки, — в аналогичные вершины параллелограммов второй решетки. Повторяя это рассуждение, построим образы всех вершин параллелограммов. Очевидно, что центры всех параллелограммов первой решетки переходят в центры соответствующих параллелограммов второй решетки. Проведя через них прямые, параллельные сторонам параллелограммов, получим решетки из параллелограммов вдвое меньшего размера, которые также соответствуют друг другу (рис. 20). Этот процесс уменьшения сторон параллелограммов можно повторять неограниченно. Рассмотрим теперь произвольную точку M плоскости. Она опре-

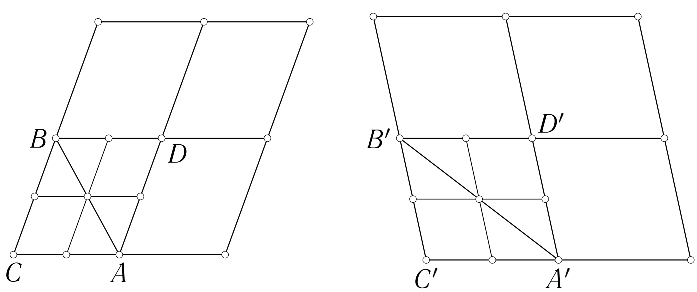

Рис. 20

деляет последовательность вложенных параллелограммов первой решетки с неограниченно уменьшающимися сторонами, каждый из которых содержит точку M. Этой последовательности соответствует аналогичная последовательность параллелограммов второй решетки, которая определяет единственную принадлежащую всем параллелограммам последовательности точку M'. Следовательно, образ любой точки определяется однозначно. Проверка того, что построенное преобразование действительно будет аффинным, не представляет труда. Теорема доказана.

Отметим, что в процессе доказательства теоремы 1 мы фактически доказали следующие свойства аффинных преобразований.

1. Аффинные преобразования сохраняют отношения длин параллельных отрезков.

2. Отношение площади любой фигуры к площади ее аффинного образа постоянно для всех фигур.

Теорема 1 дает мощное средство для решения задач аффинной геометрии. Например, из нее следует, что все треугольники аффинно эквивалентны, и, таким образом, любое аффинное утверждение достаточно доказать для треугольника специального вида, например правильного. В частности, совершенно очевидной становится теорема о медианах: поскольку в ней говорится лишь об отношениях отрезков, лежащих на одной прямой, а эти отношения при аффинных преобразованиях не меняются, достаточно доказать ее для правильного треугольника. Рассмотрим еще несколько задач.

Задача 35. Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Р е ш е н и е. Пусть боковые стороны трапеции AB и CD пересекаются в точке E. Аффинное преобразование, переводящее треугольник AED в равнобедренный, переводит данную трапецию также в равнобедренную, для которой четыре указанных точки лежат на оси симметрии (рис. 21).

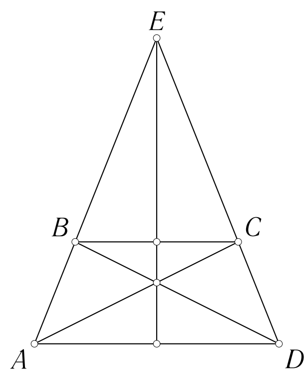

Рис. 21

Задача 36. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC даны точки M, N, P и симметричные им относительно середин соответствующих сторон точки M', N', P'. Доказать, что треугольники MNP и $M'N'P'$ равновелики.

Р е ш е н и е. Взяв в качестве треугольника ABC правильный, получим, что треугольники MNP и $M'N'P'$ равны (рис. 22). Поскольку отношения

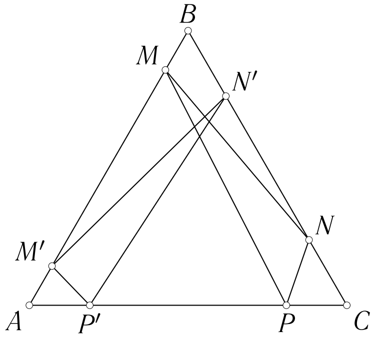

Рис. 22

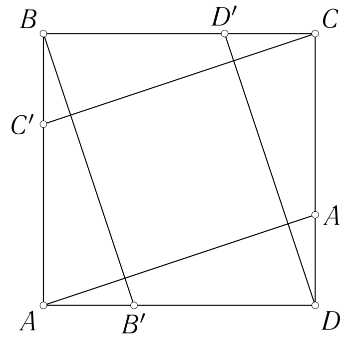

Рис. 23

отрезков, лежащих на одной прямой, и площадей сохраняются при аффинном преобразовании, эти треугольники останутся равновеликими и в общем случае.

Задача 37. На сторонах параллелограмма $ABCD$ площади S взяты такие точки A', B', C', D', что $BC' = AB/3$, $CD' = BC/3$, $DA' = CD/3$, $AB' = DA/3$. Найти площадь четырехугольника, образованного прямыми AA', BB', CC', DD'.

Р е ш е н и е. Поскольку все параллелограммы аффинно эквивалентны, достаточно решить задачу для квадрата со стороной 1. В этом случае указанный четырехугольник тоже будет квадратом. При этом длина отрезка BB' равна $\sqrt{10}/3$, а отношение отрезков, на которые он делится прямыми AA' и CC', равно $1:6:3$. Поэтому сторона маленького квадрата равна $\sqrt{10}/5$, а его площадь $2/5$ (рис. 23).

Выясним теперь, как устроено произвольное аффинное преобразование. Прежде всего приведем пример аффинного преобразования, не являющегося подобием.

О п р е д е л е н и е. **Сжатием к прямой** l с коэффициентом k называется преобразование, переводящее произвольную точку M в такую точку M', что точки M и M' лежат по одну сторону l, прямая MM' перпендикулярна l и $OM' = OM/k$, где O — точка пересечения MM' и l.

У т в е р ж д е н и е. Сжатие к прямой является аффинным преобразованием.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что сжатие к l сохраняет параллельность и перпендикулярность прямых прямой l. Поэтому рассмотрим прямую AB, наклонную к l и пересекающую ее в точке O. Опустим перпендикуляры AM и BN на l, построим образ A' точки A при сжатии и найдем точку B' пересечения прямых OA и BN. Из подобия треугольников OAM и OBN, $OA'M$ и $OB'N$ вытекает, что B' — образ точки B, т. е. сжатие переводит прямую в прямую. Отношение тангенсов углов AOM и $A'OM$

независимо от положения точки O равно k, следовательно, параллельные прямые переходят в параллельные (рис. 24). Оказывается, сжатием к прямой в определенном смысле является любое аффинное преобразование. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 2. Любое аффинное преобразование можно представить как композицию сжатия к прямой и подобия.

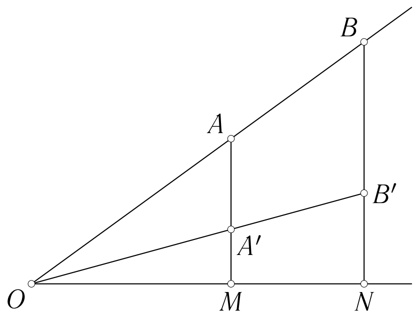

Рис. 24

Доказательство. Возьмем на плоскости произвольную квадратную решетку. Данное аффинное преобразование переводит ее в решетку из параллелограммов. Если эти параллелограммы являются прямоугольниками, утверждение теоремы очевидно. В противном случае рассмотрим некоторый квадрат решетки $OACB$. Пусть в соответствующем параллелограмме $O'A'C'B'$ угол $A'O'B'$ острый. Будем поворачивать квадратную решетку вокруг точки O. Параллелограмм $O'A'B'C'$ при этом будет поворачиваться вокруг O', меняя свою форму. Когда квадратная решетка повернется на прямой угол, точка A' перейдет в B', а B' — в вершину параллелограмма, смежного с $O'A'C'B'$, при этом угол $A'O'B'$ станет тупым (рис. 25). Поэтому существует промежуточное значение угла поворота, при котором этот угол прямой. Соответствующая этому углу квадратная решетка переходит в прямоугольную, что и доказывает теорему. Отметим, что сжатие к прямой легко реализовать с помощью рассмотренного в начале главы параллельного проектирования. Действительно, если направление проектирования перпендикулярно линии пересечения плоскостей стекла и стены, результатом проектирования будет сжатие к этой линии. Изменяя угол между плоскостями и направление проектирования, можно добиться, что коэффициент сжатия примет любое заданное значение. Таким образом, параллельное проектирование можно считать универсальным примером аффинного преобразования. Следующая задача легко решается применением теоремы 2.

Задача 38. Доказать, что аффинное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, является подобием.

Решение. Опишем вокруг данной окружности квадрат и повернем его так, чтобы данное преобразование переводило его в прямоугольник. Окружность, являющаяся образом данной, будет вписана в этот прямоугольник. Но в прямоугольник, отличный от квадрата, вписать окружность нельзя. Поэтому данное преобразование переводит квадратную решетку

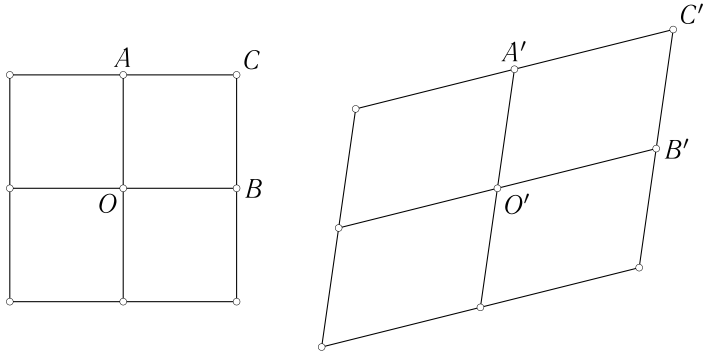

Рис. 25

в квадратную и, значит, является подобием.

Задача 39. На основании AB треугольника ABC отложены равные отрезки $AA' = BB' = a$, и через точки A' и B' проведены прямые, параллельные сторонам BC и AC. Какую линию описывает точка пересечения этих прямых при изменении величины a?

Задача 40. Вершины треугольника $A'B'C'$ лежат на сторонах треугольника ABC и делят их в одном и том же отношении. Доказать, что центры тяжести обоих треугольников совпадают.

Задача 41. Через каждую вершину треугольника ABC проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Доказать, что три прямые, соединяющие противоположные вершины полученного шестиугольника, пересекаются в одной точке.

Задача 42. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B', так что $\dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{BA'}{BC} = \dfrac{CB'}{CA} = 1/3$. Доказать, что площадь треугольника, образованного прямыми AA', BB' и CC', равна $1/7$ площади ABC.

Глава 3

Проективные преобразования

3.1. Проективная плоскость

В предыдущей главе мы перешли от преобразований подобия к более общим аффинным преобразованиям, характеристическим свойством которых является сохранение параллельности прямых. В этой главе мы сделаем следующий шаг в том же направлении, рассмотрев еще более общие преобразования. Возьмем опять уже рассматривавшийся нами чертеж на стекле и будем получать его изображение на стене, но на этот раз изображение будут создавать не солнечные лучи, которые считаются параллельными, а лучи, идущие из некоторой точки. Нетрудно убедиться, что, хотя прямые при таком проектировании (оно называется **центральным**) остаются прямыми, их параллельность может не сохраняться. Действительно, проведем через центр проектирования плоскость, параллельную плоскости стены. Если плоскости стены и стекла не параллельны (в случае их параллельности центральное проектирование является просто гомотетией), она пересечет плоскость стекла по некоторой прямой a. Точкам этой прямой не соответствуют никакие точки стены, поэтому две прямые на стекле, точка пересечения которых принадлежит прямой a, перейдут в параллельные прямые на стене. Аналогично две параллельные прямые на стекле перейдут в прямые на стене, пересекающиеся в некоторой точке прямой a', по которой стена пересекается с плоскостью, параллельной стеклу и проходящей через центр проектирования. Впрочем, это рассуждение показывает, что центральное проектирование не дает взаимно однозначного соответствия между точками стекла и стены и, значит, не может считаться преобразованием. Чтобы обойти эту сложность, будем считать две параллельные прямые данной плоскости пересекающимися в **бесконечно удаленной точке**, причем множество всех бесконечно удаленных точек образует прямую, которая также называется **бесконечно удаленной**. При таком соглашении центральное проектирование переводит прямую a в бесконечно удаленную прямую плоскости стены, а бесконечно удаленную прямую плоскости стекла в прямую a', т. е. становится взаимно однозначным соответствием, переводящим любую прямую в прямую. Плоскость, пополненную бесконечно удаленной прямой, называют **проективной плоскостью**. Теперь мы можем дать следующее определение.

Определение. Преобразование проективной плоскости, переводящее любую прямую в прямую, называется **проективным**. Из определения сразу следует, что проективные преобразования образуют группу и любое аффинное преобразование является проективным. Можно определить аффинное преобразование как проективное, сохраняющее бесконечно удаленную прямую. Перейдем к изучению свойств проективных преобразований.

Теорема 1. Любой четырехугольник может быть получен как центральная проекция квадрата.

Доказательство. Пусть $ABCD$ данный — четырехугольник, E — точка пересечения AB и CD, F — точка пересечения AD и BC, M, N — точки пересечения прямой EF с диагоналями BD и AC. Проведем через EF произвольную плоскость p, не совпадающую с плоскостью $ABCD$, и построим в этой плоскости две окружности с диаметрами EF и MN. Одну из точек пересечения этих окружностей O выберем в качестве центра проектирования. В качестве плоскости проекции возьмем любую плоскость, параллельную плоскости p. Из выбора центра и плоскости проекции вытекает, что прямая EF перейдет в бесконечно удаленную прямую, т. е. проекция $A'B'C'D'$ четырехугольника $ABCD$ будет параллелограммом. При этом угол между сторонами этого параллелограмма равен углу EOF, а угол между его диагоналями равен углу MON. Эти углы в силу выбора точки O прямые, следовательно, $A'B'C'D'$ — квадрат (рис. 26).

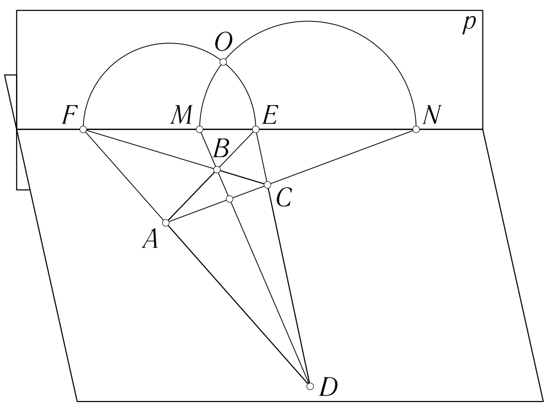

Рис. 26

Из теоремы 1 вытекает, что если даны два четырехугольника, то существует проективное преобразование, переводящее один из них в другой. Следующая теорема показывает, что такое преобразование единственно.

Теорема 2. Пусть даны две четверки точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой: A, B, C, D и A', B', C', D'. Тогда существует единственное проективное преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C', D в D'.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда $ABCD$ — квадрат. Как и при доказательстве аналогичной теоремы аффинной геометрии, построим квадратную решетку, одним из квадратов которой будет $ABCD$, и найдем образы ее узлов. Пусть стороны $A'B'$ и $C'D'$ четырехугольника $A'B'C'D'$ пересекаются в точке E, $A'D'$ и $B'C'$ — в точке F. Тогда EF — образ бесконечно удаленной прямой, в точке E пересекаются образы сторон квадратов решетки, параллельных прямой AB, в точке F — параллельных прямой CD. Проведем диагональ $B'D'$ и найдем точку M ее пересечения с EF. В этой точке пересекаются образы всех диагоналей квадратов решетки, параллельных прямой BD, поэтому точка пересечения прямых MA' и $B'C'$ будет образом одной из вершин квадрата, смежного с $ABCD$ по стороне AB. Соединив эту точку с E и построив точку пересечения этой прямой с прямой $A'D'$, найдем образ оставшейся вершины этого квадрата. Продолжая этот процесс, найдем образы всех вершин квадратов решетки. Пусть теперь O — точка пересечения прямых $A'C'$ и $B'D'$. Прямые OE и OF являются образами средних линий квадрата $ABCD$, т. е. позволяют найти образы середин его сторон. Таким образом находятся образы всех вершин решетки со стороной, равной половине AB (рис. 27). Этот процесс можно повторять неограниченно. Образ произвольной точки P находится теперь аналогично соответствующей аффинной теореме.

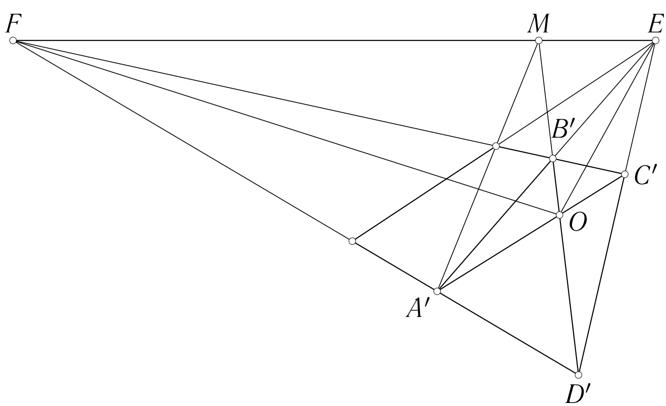

Рис. 27

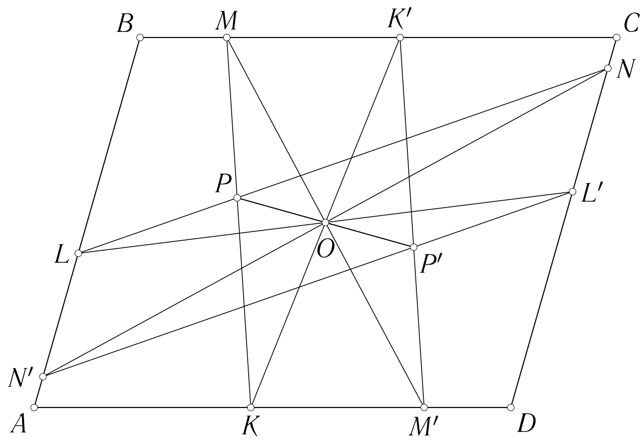

Рис. 28

Из теорем 1 и 2 следует, что все четырехугольники проективно эквивалентны. Поэтому если некоторое утверждение, формулируемое в терминах принадлежности точек прямым, справедливо для одного четырехугольника, например квадрата, оно справедливо для всех четырехугольников. Рассмотрим несколько задач, решаемых с помощью этого принципа.

Задача 43. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведены четыре прямые, пересекающие его стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N', и прямые KM и LN пересекаются в точке P, $K'M'$ и $L'N'$ — в точке P'. Доказать, что точки P, O, P' лежат на одной прямой.

Р е ш е н и е. С помощью проективного преобразования переведем $ABCD$ в параллелограмм. Тогда точки K и K', L и L', M и M', N и N' центрально симметричны относительно O. Поэтому прямые KM и $K'M'$, LN и $L'N'$ и точки P и P' тоже центрально симметричны, что и доказывает утверждение задачи (рис. 28).

Задача 44. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ взята точка M_0. Точка M_1 является проекцией M_0 на BC из точки D, M_2 — проекцией M_1 на CD из A, M_3 — проекцией M_2 на DA из B, M_4 — проекцией M_3 на AB из C и т. д. Доказать, что M_{12} совпадает с M_0.

Р е ш е н и е. Переведем $ABCD$ в квадрат и выберем систему координат с началом в точке A и осями AD и AB. Сторону квадрата будем считать равной 1. Пусть M_0 имеет координаты $(0,\ y)$. Тогда из подобия треугольников AM_0D и BM_1M_0 получаем, что M_1 имеет координаты $\left(\dfrac{y-1}{y},\ 1\right)$. Аналогично, M_2, M_3, M_4 имеют координаты $\left(1,\ \dfrac{y}{y-1}\right)$, $(1-y,\ 0)$, $\left(0,\ \dfrac{y-1}{y}\right)$

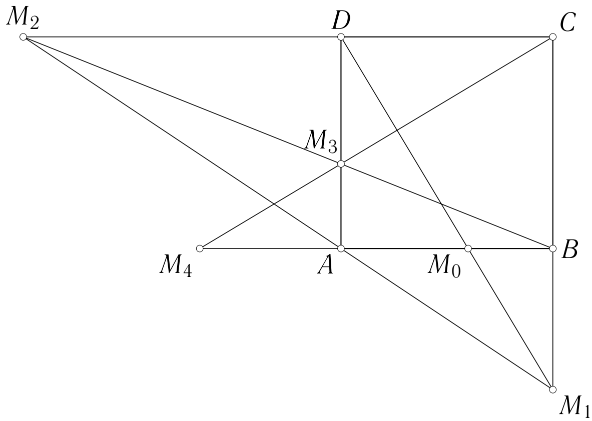

Рис. 29

соответственно (рис. 29). Тогда M_8 имеет координаты $\left(0,\ \dfrac{1}{1-y}\right)$, а M_{12} — координаты $(0,\ y)$.

Другое важное следствие теорем 1 и 2 состоит в том, что любое проективное преобразование может быть получено как центральная проекция. Оно будет использовано в следующем параграфе. В заключение докажем еще две важных теоремы проективной геометрии.

Теорема Дезарга. Прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, соединяющие вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения сторон A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой (рис. 30).

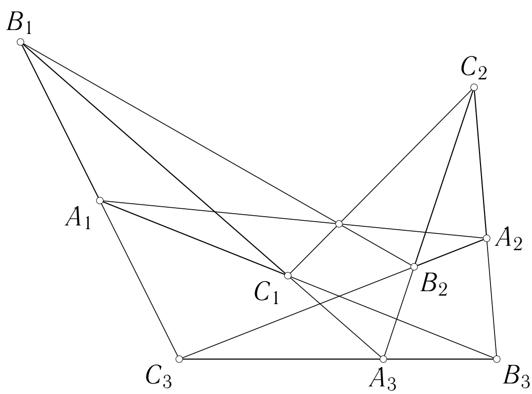

Рис. 30

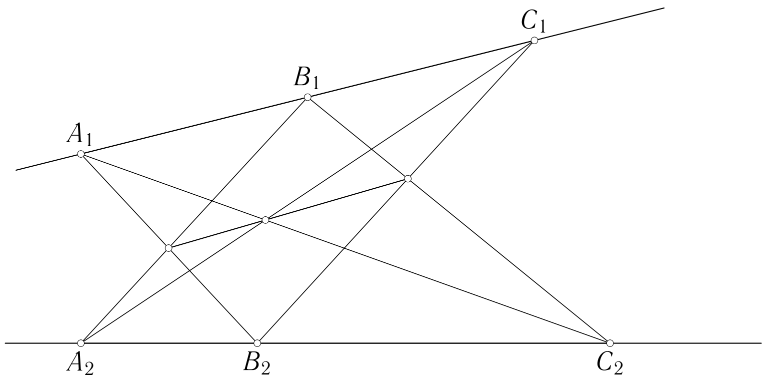

Рис. 31

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки пересечения сторон A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой. Переведем эту прямую в бесконечно удаленную. Тогда данные треугольники перейдут в два треугольника с соответственно параллельными сторонами. Из свойств подобия следует, что такие треугольники гомотетичны и прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в центре гомотетии. Обратно, пусть прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в точке O, прямые B_1C_1 и B_2C_2 — в точке A, прямые C_1A_1 и C_2A_2 — в точке B. Будем считать, что AB — бесконечно удаленная прямая. Тогда отрезки B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 гомотетичны с центром O и одним и тем же коэффициентом. Поэтому отрезки A_1B_1 и A_2B_2 также гомотетичны и, следовательно, параллельны, т. е. точка их пересечения принадлежит прямой AB. Теорема доказана.

Т е о р е м а П а п п а. Если точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой l_1, точки A_2, B_2, C_2 — на прямой l_2, то точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 лежат на одной прямой (рис. 31).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямые A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 пересекаются соответственно в точках B и A. Будем считать прямую AB бесконечно удаленной. Тогда треугольники OA_1C_2 и OC_1A_2, где O — точка пересечения прямых l_1 и l_2, подобны, и, значит, $OA_1 \cdot OA_2 = OC_1 \cdot OC_2$. Аналогично $OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2$. Но тогда $OA_1 \cdot OA_2 = OB_1 \cdot OB_2$, и прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны, т. е. их точка пересечения лежит на AB. Теорема доказана.

Задача 45. Даны две прямые и не лежащая на них точка P. Через P проводятся различные пары прямых, пересекающих данные в точках A и C, B и D. Доказать, что точки пересечения прямых AD и BC образуют прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых.

Задача 46. Дана прямая q и не лежащие на ней точки A, B. Пусть U, V — точки прямой q, N — точка пересечения прямых UA и VB, M — точка пересечения прямых UB и VA. Доказать, что при любых U, V прямая MN пересекает AB в одной и той же точке.

Задача 47. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырехугольник, N — точка пересечения диагоналей, P, Q — точки пересечения противоположных сторон, B_1, B_2, B_3, B_4 — точки пересечения прямых NP, NQ со сторонами четырехугольника, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8 — точки пересечения сторон четырехугольников $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Доказать, что

а) прямые M_1M_5, M_2M_6, M_3M_7, M_4M_8 проходят через N;

б) прямые M_2M_3, M_6M_7 проходят через P, M_1M_8, M_4M_5 — через Q;

в) прямые M_1M_2, M_3M_8, M_4M_7, M_5M_6 проходят через точку пересечения прямых PQ и A_2A_4, M_3M_4, M_2M_5, M_1M_6, M_7M_8 — через точку пересечения прямых PQ и A_1A_3;

г) четверки прямых M_1M_3, M_5M_7, B_4M_4, B_2M_8; M_2M_4, M_6M_8, B_4M_5, B_2M_1; M_3M_5, M_1M_7, B_1M_6, B_3M_2; M_4M_6, M_2M_8, B_1M_7, B_3M_3 пересекаются в четырех точках прямой PQ.

3.2. Двойное отношение точек

При изучении аффинных преобразований мы доказали следующее свойство: если точки A, B, C лежат на одной прямой, то отношение $\frac{AC}{BC}$ остается постоянным при любых аффинных преобразованиях. Исследуем, что происходит с этим отношением при проективных преобразованиях. Для этого воспользуемся доказанным ранее утверждением, что всякое проективное преобразование является центральной проекцией. Итак, пусть точки A, B, C лежат на прямой l, A', B', C' на прямой l', прямые AA', BB', CC' пересекаются в центре проекции O. Тогда (рис. 32) $\frac{AC}{BC}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=\frac{OA\cdot OC\cdot\sin AOC}{OB\cdot OC\cdot\sin BOC}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{\sin AOC}{\sin BOC}$. Аналогично $\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{OA'}{OB'}\cdot\frac{\sin AOC}{\sin BOC}$. Объединяя эти результаты, получаем $\frac{AC}{BC}:\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{OA}{OB}:\frac{OA'}{OB'}$. Правая часть этого равенства не зависит от выбора точки C. Поэтому, заменив точки C, C' на другую

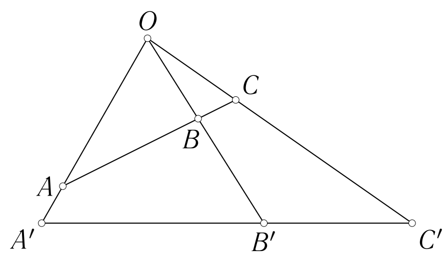

Рис. 32

пару D, D' соответствующих точек прямых l, l', получим $\dfrac{AC}{BC}:\dfrac{A'C'}{B'C'}=$ $=\dfrac{AD}{BD}:\dfrac{A'D'}{B'D'}$, т. е. $\dfrac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=\dfrac{A'C'\cdot B'D'}{A'D'\cdot B'C'}$. Таким образом доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Для любых четырех точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, проективное преобразование сохраняет отношение $\dfrac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$. Это отношение называется **двойным отношением** четырех точек и обозначается $(AB;\ CD)$.

Задача 48. Пусть $(AB;\ CD)=k$. Найти двойные отношения точек A, B, C, D, записанных в другом порядке.

Р е ш е н и е. Непосредственно из определения двойного отношения следует, что $(AB;\ CD)=(BA;\ DC)=(CD;\ AB)=(DC;\ BA)=k$, т. е. 24 двойных отношения разбиваются на 6 групп из 4 равных отношений каждая. Кроме того, $(AB;\ DC)=1/k$. Для нахождения остальных двойных отношений следует рассмотреть различные случаи расположения точек A, B, C, D на прямой. Пусть для определенности они расположены именно в этом порядке, так что $AD=AB+BC+CD$. Тогда $AD\cdot BC+AB\cdot CD=BC\cdot(AB+BC+CD)+AB\cdot CD=(AB+BC)(BC+CD)=$ $=AC\cdot BD$, т. е. $(AB;\ DC)+(AD;\ BC)=1$, $(AC;\ BD)+1=(AB;\ CD)$. Отсюда $(AC;\ BD)=k-1$, $(AD;\ BC)=1-1/k$. Остальные отношения легко находятся с помощью ранее найденных формул.

Задача 49. Пусть стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, BC и AD — в точке F диагонали AC и BD пересекают EF в точках M и N. Найти $(EF;\ MN)$.

Р е ш е н и е. Так как искомое двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях, оно должно быть одинаковым для всех четырехугольников. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC. Для нее E — середина отрезка MN, F — бесконечно удаленная точка прямой MN и $(EF;\ MN)=1$. Такая четверка точек называется **гармонической**. Нетрудно убедиться также, что для любой гармонической четверки E, F, M, N существует бесконечно много четырехугольников, противоположные стороны которых пересекаются в точках E и F, а диагонали пересекают EF в точках M и N.

Задача 50. Диагонали пятиугольника $ABCDE$ образуют пятиугольник $A'B'C'D'E'$ (E' — точка пересечения прямых AC и BD и т. п.). Известно, что $(AD';\ E'C)=(BE';\ A'D)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Найти аналогичные двойные отношения четверок точек на остальных диагоналях.

Задача 51. Художник, рисуя улицу, сделал расстояния между четырьмя соседними фонарями равными 10, 6, и 3 см. Верен ли его рисунок?

3.3. Проективные преобразования и окружность

Как было показано ранее, аффинное преобразование, отличное от подобия, не сохраняет окружности. Тем более не сохраняют их проективные преобразования. Однако если аффинные преобразования искажают все окружности, при проективных преобразованиях некоторые окружности могут сохраниться. При этом имеет место следующий результат.

Теорема 1. Дана окружность и точка C внутри нее. Существует центральная проекция, при которой данная окружность переходит в окружность, а точка C — в ее центр.

Доказательство. Рассмотрим косой круговой конус (конус, в котором перпендикуляр из вершины на плоскость основания не попадает в центр). Пусть OAB — сечение конуса плоскостью, проходящей через его высоту и центр основания, $OA' = OA$, $OB' = OB$. Докажем, что сечение конуса плоскостью, перпендикулярной поверхности чертежа и проходящей через $A'B'$, — окружность. Рассмотрим, как и раньше, сечение конуса его плоскостью симметрии — OK_1K_2. Опишем около него окружность и проведем биссектрису угла K_1OK_2, которая пересечет эту окружность в точке M. Дуги MK_1 и MK_2 равны, так как им соответствуют равные вписанные углы, поэтому перпендикуляр, опущенный из центра окружности на K_1K_2, проходит через M. При вращении окружности вокруг этого перпендикуляра образуется шар, в который вписан данный конус. При этом точка M равноудалена от всех точек оснований конуса (рис. 33). Проведем теперь произвольную плоскость через прямую OM. Она пересечет шар по окружности, а конус по треугольнику OH_1H_2, вписанному в эту окружность. При этом, как было показано выше, хорды MH_1 и MH_2 будут равны, а значит, равны и соответствующие им вписанные углы H_1OM и H_2OM. Таким образом, в любом сечении конуса, проходящем через прямую OM, эта прямая является биссектрисой угла при вершине и, значит, осью симметрии конуса (если рассматривать его как совокупность прямых, проходящих через вершину, а не их отрезков). Отсюда следует, что сечение конуса плоскостью, симметричной плоскости основания AB относительно его оси, также будет окружностью, а значит, окружностью будет и любое сечение параллельной плоскостью, в том числе и плоскостью $A'B'$. Пусть C' — середина отрезка $A'B'$, C — точка пересечения прямых AB и OC'. Применяя теорему синусов к треугольни-

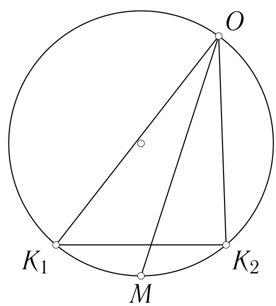

Рис. 33

кам OAC, OBC, $OA'C'$, $OB'C'$, нетрудно вывести соотношение $\frac{AC}{BC} = \frac{AO^2}{OB^2}$. Таким образом, выбрав нужное соотношение длин отрезков OA и OB и расположив точку O над нужным диаметром исходной окружности, можно всегда добиться, что точка C перейдет в центр C' окружности, содержащей точки A и B. Теорема доказана.

Докажем также важное следствие теоремы 1.

Теорема 2. Дана окружность и не пересекающая ее прямая l. Существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а l — в бесконечно удаленную прямую.

Доказательство. Возьмем две произвольные точки A и B прямой l и проведем касательные к окружности AK, AL, BM, BN. Пусть прямые KL и MN пересекаются в точке P. По теореме 1 существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а P — в ее центр. При этом KL и MN перейдут в диаметры окружности, а касательные в точках K и L, M и N — в две пары параллельных прямых (очевидно, что касательная переходит в касательную). Соответственно, точки A и B, а значит, и вся прямая l, перейдут в бесконечно удаленные.

Теоремы 1 и 2 относятся к числу важнейших результатов проективной геометрии. С их помощью можно доказать практически любое утверждение о конфигурациях, состоящих из окружности и прямых. Приведем наиболее интересные примеры таких утверждений.

Теорема Паскаля. Точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть стороны AB и DE шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке K, BC и EF — в точке L, CD и FA — в точке M. В результате проективного преобразования, переводящего данную окружность в окружность, а прямую KL в бесконечно удаленную, стороны AB и DE, BC и EF становятся параллельными. Из этого вытекает равенство дуг AE и BD, BF и CE. Но тогда дуги AC и DF тоже равны, и, следовательно, хорды CD и AF параллельны, что равносильно утверждению теоремы (рис. 34).

Теорема Брианшона. Главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть диагонали AD и BE пересекаются в точке P. В соответствии с теоремой 1 переведем P в центр окружности. Тогда эти диагонали станут биссектрисами углов A и D, B и E шестиугольника, следовательно, суммы углов $B+C$ и $E+F$, $C+D$ и $A+F$ равны. Но тогда суммы углов $A+B$ и $E+D$ также равны, а значит, угол между биссектрисами CP и FP углов C и F равен π, т. е. точки C, P, F лежат на одной прямой (рис. 35). Следует, впрочем, заметить, что в приведенных

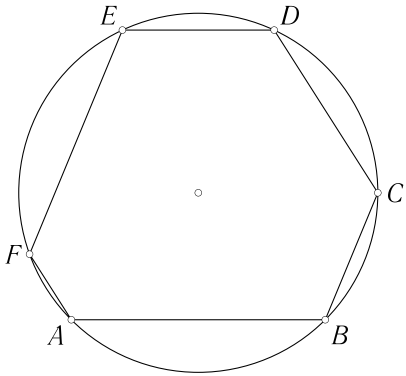

Рис. 34

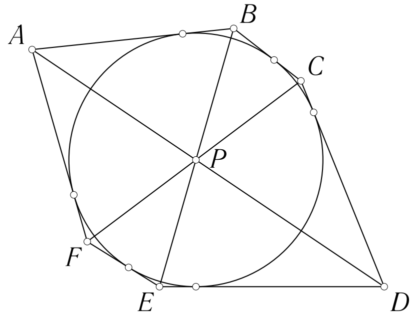

Рис. 35

доказательствах шестиугольник предполагался выпуклым. В действительности теоремы Паскаля и Брианшона верны и для самопересекающихся шестиугольников, но доказательства в этом случае более сложные.

Теорема о бабочке. Через середину C хорды AB проведены две хорды KM и LN. Прямые KL и MN пересекают хорду AB в точках D и E. Доказать, что $CD = CE$ (рис. 36).

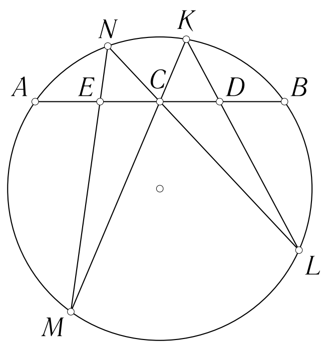

Рис. 36

Доказательство. Утверждение задачи эквивалентно равенству $(AB;\ CD) = (BA;\ CE)$. Но двойные отношения сохраняются при проективных преобразованиях, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда C — центр окружности. В этом случае точки D и E симметричны относительно C и утверждение теоремы очевидно. Недостаток этого доказательства в том, что его нельзя распространить на случай, когда прямая AB не пересекает окружность, а C — основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности на AB.

Задача 52. Дана окружность и точка C внутри (вне) ее. Через точку C проведены 4 хорды (секущие) A_iB_i, $i = 1, \ldots, 4$. Пусть D — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E — точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Доказать, что точки C, D, E лежат на одной прямой (рис. 37).

Решение. Если точка C находится внутри окружности, спроектируем ее в центр. Тогда точки A_i и B_i, прямые A_1A_2 и B_1B_2, A_3A_4 и B_3B_4, точки D и E будут центрально-симметричны относительно C. Если точ-

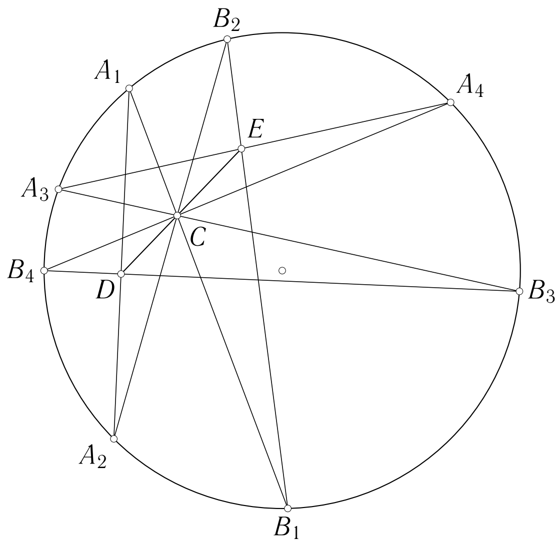

Рис. 37

ка C находится вне окружности, спроектируем ее в бесконечно удаленную точку. Тогда четыре проведенные секущие перейдут в параллельные, и перпендикулярный им диаметр окружности будет осью симметрии конфигурации. Соответственно прямая DE будет перпендикулярна этому диаметру и, следовательно, пересечет бесконечно удаленную прямую в точке C. Отметим, что из утверждения задачи 52 можно вывести следующий, на первый взгляд отнюдь не проективный, результат.

Задача 53. Доказать, что если четырехугольник является вписанным в окружность и описанным вокруг другой окружности, то прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

Р е ш е н и е. Пусть $A_1A_3A_2A_4$ — данный четырехугольник, A_iB_i — биссектрисы его углов. Так как в четырехугольник можно вписать окружность, биссектрисы пересекаются в центре этой окружности — точке C. Далее, точки B_1, B_2 являются серединами двух дополнительных дуг A_3A_4 описанной окружности, следовательно, B_1B_2 — диаметр этой окружности. Аналогично B_3B_4 — также диаметр, и, значит, точка E — центр описанной окружности. Из утверждения задачи 52 следует, что прямая CE проходит через точку D пересечения диагоналей четырехугольника. Впрочем, вписанно-описанные многоугольники обладают целым рядом красивых свойств, для доказательства которых проективных методов недостаточно.

Задача 54. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон и вписанной окружности, пересекаются в одной точке.

Задача 55. Пусть стороны A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ касаются вписанной в него окружности в точках C_2, A_2, B_2. Прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 вторично пересекают окружность в точках A_3, B_3, C_3, а касательные к окружности в этих точках пересекаются в точках A_4, B_4, C_4. Доказать, что четверки прямых A_iB_i, B_iC_i, C_iA_i пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.

Задача 56. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в окружность S, а P, Q, R — точки пересечения его противоположных сторон и диагоналей. Доказать, что существует бесконечно много вписанных в S четырехугольников, точки пересечения противоположных сторон которых совпадают с P и Q, причем диагонали всех таких четырехугольников пересекаются в R.

Задача 57. Дан вписанный в окружность четырехугольник. Доказать, что диагонали этого четырехугольника и четырехугольника, образованного касательными к окружности в его вершинах (два таких четырехугольника будем называть соответствующими), пересекаются в одной точке.

Задача 58. Доказать, что противоположные стороны вписанного четырехугольника пересекаются на диагонали соответствующего описанного четырехугольника.

3.4. Полярное соответствие

До сих пор мы изучали преобразования плоскости, т. е. взаимно однозначные отображения множества точек плоскости на себя. При этом прямым на плоскости соответствовали также прямые. Однако часто оказывается полезным рассмотреть отображение другого вида, при котором точкам ставятся в соответствие прямые и наоборот. Примером такого отображения является полярное соответствие относительно окружности.

Определение. **Полярное соответствие** относительно окружности с центром O и радиусом r ставит в соответствие каждой точке плоскости A, отличной от O, прямую a, перпендикулярную OA и пересекающую луч OA в такой точке A', что $OA \cdot OA' = r^2$. Прямая a называется **полярой** точки A, а точка A — **полюсом** прямой a. Полярой точки O считается бесконечно удаленная прямая, а полярой бесконечно удаленной точки — диаметр, перпендикулярный проходящим через нее параллельным прямым. Отметим важное свойство полярного соответствия.

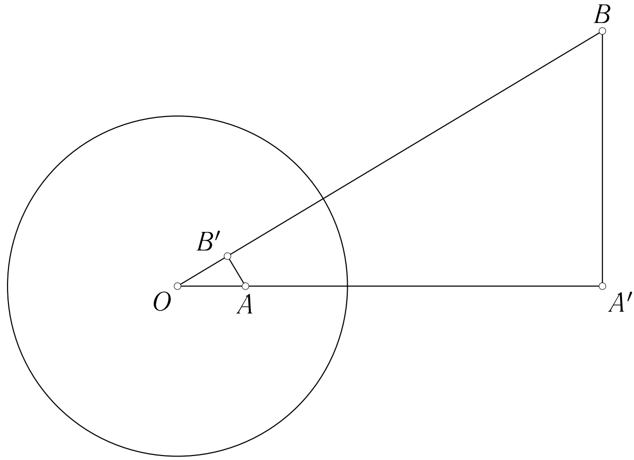

Рис. 38

Т е о р е м а. Если точка B лежит на поляре a точки A, то ее поляра b проходит через A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A' — точка пересечения прямых a и OA, B' — основание перпендикуляра, опущенного из A на OB. Тогда треугольники $OA'B$ и $OB'A$ подобны, следовательно, $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = r^2$, и AB' — поляра точки B (рис. 38).

Из доказанной теоремы вытекает, что полюс любой прямой является пересечением поляр всех ее точек, и наоборот, поляра точки является геометрическим местом полюсов всех проходящих через эту точку прямых. Отметим также, что полярой точки A, лежащей вне окружности, будет прямая, соединяющая точки касания окружности с касательными, проведенными к ней из точки A (точки касания являются полюсами касательных). Отсюда следует, что, несмотря на метрическое определение, полярное соответствие является проективным понятием, т. е. если проективное преобразование сохраняет данную окружность и переводит точку A в A', то поляра a точки A переходит в поляру a' точки A'. Это позволяет сформулировать следующий принцип.

П р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и. Пусть доказано некоторое проективное утверждение. Тогда верным также будет утверждение, полученное из доказанного взаимной заменой следующих терминов: (точка) $\leftrightarrow$ (прямая), (лежать на прямой) $\leftrightarrow$ (проходить через точку), (лежать на окружности) $\leftrightarrow$ (касаться окружности).

Примерами утверждений, получающихся друг из друга по принципу двойственности, являются теоремы Паскаля и Брианшона, прямое

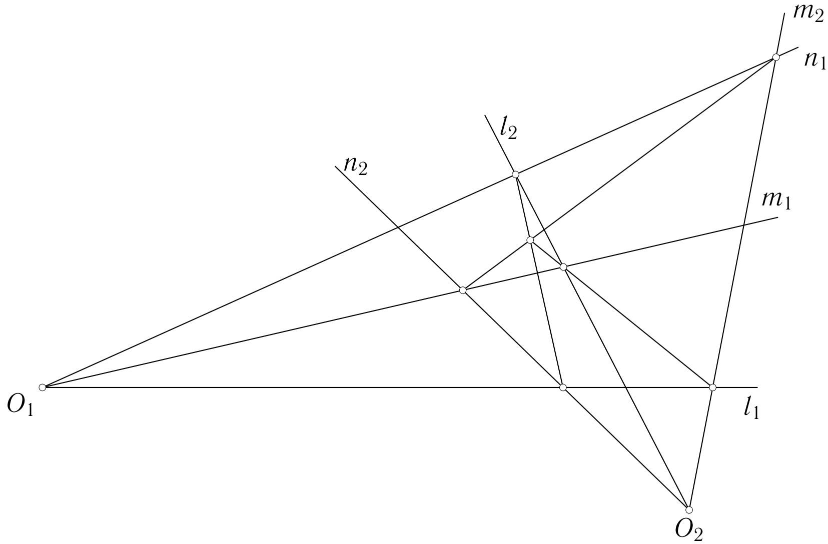

Рис. 39

и обратное утверждения теоремы Дезарга, теоремы 1 и 2 предыдущего параграфа.

Задача 59. Прямые l_1, m_1, n_1 проходят через точку O_1, а l_2, m_2, n_2 — через точку O_2. Доказать, что прямые, соединяющие точки пересечения l_1, m_2 и l_2, m_1; l_1, n_2 и l_2, n_1; m_1, n_2 и m_2, n_1, пересекаются в одной точке (рис. 39).

Р е ш е н и е. При применении принципа двойственности точки O_1, O_2 перейдут в две прямые, прямые l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2 — в лежащие на этих прямых точки, точки пересечения прямых l_1, m_2 и l_2, m_1; l_1, n_2 и l_2, n_1; m_1, n_2 и m_2, n_1 — в прямые, соединяющие соответствующие точки. Утверждению, что три прямые пересекаются в одной точке, соответствует утверждение, что три соответствующие этим прямым точки лежат на одной прямой. Это утверждение совпадает с теоремой Паппа.

Задача 60. Доказать, что точки пересечения противоположных сторон вписанного и соответствующего описанного четырехугольников лежат на одной прямой.

Р е ш е н и е. Это утверждение двойственно утверждению задачи 57.

Непосредственное применение полярного соответствия также позволяет получать интересные результаты. Вот несколько примеров.

Задача 61. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из центра окружности на прямую, соединяющую точки пересечения противоположных

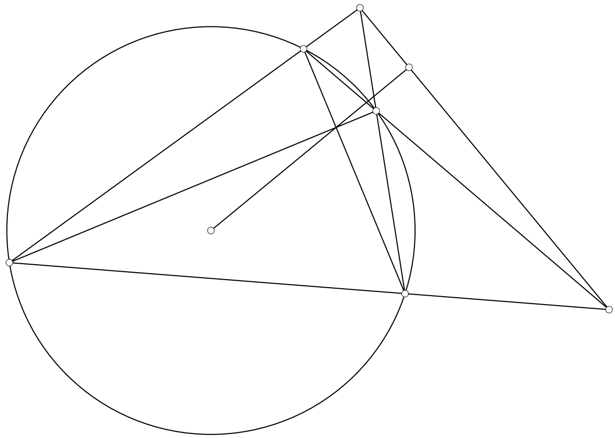

Рис. 40

сторон а) вписанного, б) описанного четырехугольника, проходит через точку пересечения диагоналей (рис. 40).

Решение. Спроектируем точку пересечения диагоналей четырехугольника в центр окружности. Тогда вписанный четырехугольник перейдет в прямоугольник, а описанный — в ромб. В обоих случаях точки пересечения противоположных сторон будут бесконечно удаленными, а прямая, их соединяющая, будет полярой точки пересечения диагоналей. Последнее утверждение, являющееся усилением утверждения задачи, останется верным при обратном проективном преобразовании.

Задача 62. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O; M — основание перпендикуляра, опущенного из O на прямую AC. Доказать, что точка O равноудалена от BM и DM.

Решение. При полярном соответствии относительно вписанной окружности точке M соответствует непересекающая окружность прямая m, а прямой AC — основание M' перпендикуляра, опущенного из O на m. Точкам A и C соответствуют секущие a и c, проведенные из M', а сторонам четырехугольника $ABCD$ — точки пересечения этих секущих с окружностью A_1, A_2, C_1, C_2. Точкам B и D соответствуют прямые A_1C_1 и A_2C_2, а прямым BM и DM — точки пересечения B' и D' этих прямых с m. Утверждение, что точка O равноудалена от BM и DM, равносильно равенству $OB' = OD'$, или, что то же самое, $M'B' = M'D'$. Таким образом, утверждение задачи равносильно следующему. Дана окружность с центром O и прямая m. Через основание перпендикуляра M', опущенного из O на m, проведены две прямые, пересекающие окружность в точках A_1 и A_2, C_1 и C_2. Прямые A_1C_1 и A_2C_2 пересекают m в точках B' и D'. До-

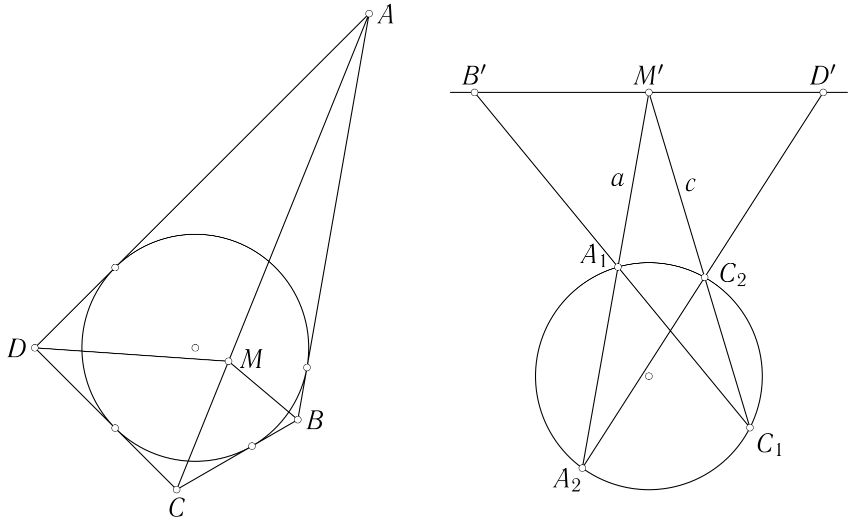

Рис. 41

казать, что $M'B' = M'D'$ (рис. 41). Это утверждение совпадает с теоремой о бабочке.

Задача 63. Доказать, что точки пересечения внешних биссектрис треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой.

Задача 64. Дан треугольник ABC и точка O. Доказать, что точки пересечения перпендикуляров, восставленных из точки O к прямым OA, OB, OC, и соответствующих сторон треугольника лежат на одной прямой.

Задача 65. Даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ и окружность S. Доказать, что если прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, то прямые, соединяющие полюсы соответствующих сторон треугольников, также пересекаются в одной точке.

Задача 66. Двойным отношением четырех прямых, проходящих через одну точку, называется двойное отношение точек пересечения этих прямых с произвольной прямой. Доказать, что двойное отношение четырех прямых равно двойному отношению их полюсов.

Глава 4

Круговые преобразования

В предыдущих главах рассматривались преобразования плоскости, переводящие прямые в прямые. Между тем, во многих задачах оказываются полезны преобразования, не обладающие этим свойством. В первую очередь, это инверсия.

О п р е д е л е н и е. **Инверсией** относительно окружности с центром O и радиусом r называется преобразование плоскости, которое каждую точку A, отличную от O, переводит в точку A', лежащую на луче OA и удовлетворяющую условию $OA \cdot OA' = r^2$. Сразу следует отметить недостаток этого определения: согласно ему точка O не имеет образа и, следовательно, инверсия не является преобразованием. Чтобы устранить это затруднение, следует, как и при определении проективных преобразований, пополнить плоскость. Но, в отличие от проективной геометрии, плоскость пополняется не прямой, а одной бесконечно удаленной точкой, которая считается образом точки O и, наоборот, переходит в O при инверсии. На пополненной таким образом плоскости инверсия уже абсолютно корректно определяет преобразование. Исследуем его свойства.

У т в е р ж д е н и е 1. Инверсия и обратное к ней преобразование совпадают.

У т в е р ж д е н и е 2. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя.

Утверждения 1 и 2 непосредственно следуют из определения.

У т в е р ж д е н и е 3. Прямая, не проходящая через центр инверсии O, переходит в окружность, проходящую через O.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из O на прямую l, B — произвольная точка прямой l, отличная от A. Найдем образ A' точки A при инверсии, построим на OA' как на диаметре окружность и возьмем вторую точку B' ее пересечения с прямой OB. Так как угол $OB'A'$ прямой, треугольники $OB'A'$ и OAB подобны. Следовательно, $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = r^2$, и образом точки B будет точка B' (рис. 38 на стр. 38). Утверждение доказано.

Из утверждений 1 и 3 вытекает, что образом любой окружности, проходящей через центр инверсии, будет прямая. Выясним, во что переходят остальные окружности.

У т в е р ж д е н и е 4. Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, причем эти две окружности гомотетичны относительно центра инверсии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая, соединяющая центр данной окружности с центром инверсии O, пересекает данную окружность в точках A и B. Найдем образы A' и B' этих точек и построим на отрезке $A'B'$ как на диаметре окружность. Так как $\dfrac{OB'}{OA} = \dfrac{OA'}{OB}$, эта окружность будет гомотетична данной. Проведем через O произвольную прямую, пересекающую данную и построенную окружности в точках C и D, D' и C'. Треугольники OBC и $OA'D'$ гомотетичны, поэтому углы OBC и $OA'D'$ равны. Но угол $OD'A'$ равен углу $OB'C'$, так как $A'B'C'D'$ — вписанный четырехугольник. Следовательно, треугольники OBC и $OC'B'$ подобны, т. е. $OC \cdot OC' = OB \cdot OB' = r^2$. Таким образом, точка C при инверсии переходит в точку C', что и доказывает утверждение (рис. 42).

Объединяя утверждения 1—4, можно сказать, что при инверсии прямым и окружностям соответствуют также прямые и окружности, причем прямым соответствуют окружности и прямые, проходящие через центр инверсии. Это позволяет рассматривать прямую как окружность, проходящую через бесконечно удаленную точку. При таком соглашении инверсию можно назвать преобразованием, сохраняющим окружности. Прежде чем сформулировать еще одно свойство инверсии, следует определить новое понятие.

О п р е д е л е н и е. **Углом между двумя кривыми** в точке A их пересечения называется угол между касательными к этим кривым в точке A.

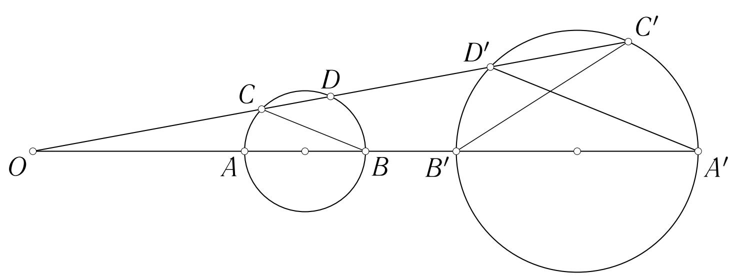

Рис. 42

Если даны две окружности, пересекающиеся в двух точках, то в силу их симметрии относительно линии центров углы между ними в обеих точках пересечения равны. Поэтому можно говорить просто об угле между окружностями.

Утверждение 5. Угол между двумя любыми кривыми равен углу между их образами при инверсии в соответствующей точке.

Доказательство. Поскольку инверсия переводит касательные в касательные, достаточно доказать утверждение для прямых. Но прямая переходит при инверсии в окружность, проходящую через точку O, причем касательная к этой окружности в точке O параллельна прямой (это видно из доказательства утверждения 3). Поэтому угол между двумя окружностями равен углу между прямыми. Утверждение доказано.

Из утверждения 5 вытекает, что окружность, перпендикулярная окружности инверсии, переходит при инверсии в себя.

Задача 67. Построить окружность, касающуюся трех данных (задача Аполлония).

Решение. Если две окружности с радиусами R и r касаются друг друга, то концентрические им окружности с радиусами $R+a$ и $r-a$ в случае внешнего касания или $R+a$ и $r+a$ в случае внутреннего также касаются при любом a. Пользуясь этим, можно одну из данных окружностей свести к точке. Соответственно задача примет следующий вид: построить окружность, проходящую через данную точку O и касающуюся двух данных окружностей. При инверсии с центром O искомая окружность перейдет в прямую, касающуюся образов данных окружностей. Таким образом задача сведена к известной задаче построения общей касательной к двум данным окружностям. Задача может иметь до 8 решений.

Задача 68. Три окружности, центры которых расположены на одной прямой, попарно касаются. Четвертая окружность касается этих трех, и расстояние от ее центра до прямой, на которой лежат центры трех остальных окружностей, равно d. Найти радиус четвертой окружности.

Решение. Точки касания трех окружностей лежат на прямой l, содержащей их центры. Пусть O — одна из этих точек. При инверсии с центром O две проходящие через O окружности перейдут в прямые, перпендикулярные прямой l. Третья окружность перейдет в окружность, касающуюся этих прямых, центр которой лежит на l, а четвертая — в окружность, касающуюся этой окружности и двух прямых. Очевидно, что радиус этой окружности вдвое меньше расстояния от ее центра до l. Так как инверсные окружности гомотетичны относительно центра инверсии, это соотношение выполняется и для данной окружности, т. е. искомый радиус равен $d/2$ (рис. 43).

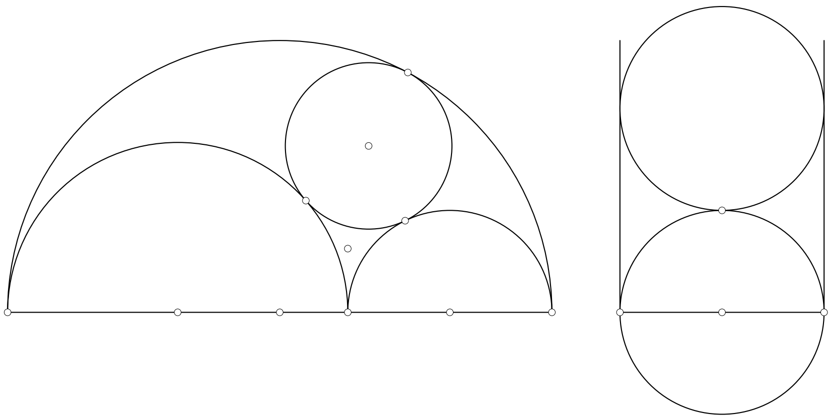

Рис. 43

Задача 69. Построить окружность, проходящую через данную точку и перпендикулярную двум данным окружностям.

Р е ш е н и е. Так как искомая окружность перпендикулярна данным, она переходит в себя при инверсии относительно них. Значит, образы данной точки при этих инверсиях лежат на искомой окружности. Следовательно, построив эти образы, мы получим три точки, определяющие искомую окружность. Задача может иметь бесконечно много решений, если образы данной точки при инверсиях относительно обеих окружностей совпадут.

Задача 70. Даны две непересекающиеся окружности. Найти инверсию, переводящую их в концентрические окружности.

Р е ш е н и е. Построим две окружности, перпендикулярные данным, и найдем какую-нибудь точку их пересечения O. При инверсии относительно O построенные окружности перейдут в прямые, пересекающиеся в некоторой точке A (A будет образом второй точки пересечения). При этом данные окружности перейдут в окружности, перпендикулярные этим прямым, т. е. в окружности с центром A. Следовательно, найденная инверсия — искомая. Вторая точка пересечения построенных окружностей является центром другой искомой инверсии. Радиус инверсии можно выбирать произвольным, так как он влияет только на размеры образов данных окружностей. Из решения задачи следует также, что все окружности, перпендикулярные двум данным непересекающимся окружностям, проходят через две фиксированные точки плоскости.

Задача 71. Окружность a лежит внутри окружности b. Окружность c_1 касается окружностей a и b, окружность c_2 касается окружностей a, b, c_1, окружность c_3 — окружностей a, b, c_2 и т. д. Доказать, что если при какомнибудь выборе окружности c_1 окружности c_1 и c_n касаются, то они будут касаться и при любом другом (поризм Понселе).

Решение. В соответствии с предыдущей задачей переведем окружности a и b в концентрические. Тогда окружности c_i перейдут в окружности, касающиеся концентрических окружностей, и утверждение задачи будет очевидно.

Ясно, что инверсии не образуют группы. Естественный способ расширения множества инверсий до группы состоит в использовании их свойства сохранять окружности. Произвольное преобразование, обладающее этим свойством, называется круговым. Оказывается, в определенном смысле произвольное круговое преобразование не отличается от инверсии. Точнее, верен следующий факт.

Теорема. Произвольное круговое преобразование может быть представлено как композиция инверсии и движения.

Доказательство. Пусть данное круговое преобразование переводит бесконечно удаленную точку в точку O. Тогда композиция этого преобразования и инверсии с центром O оставляет бесконечно удаленную точку неподвижной, т. е. переводит любую прямую в прямую и любую окружность в окружность. При этом параллельные прямые переходят в параллельные (поскольку все обычные точки плоскости переходят в обычные). Таким образом построенное преобразование будет аффинным, сохраняющим окружности, т. е. подобием. Коэффициент подобия зависит от радиуса инверсии и может быть сделан равным единице. Данное преобразование будет композицией найденных движения и инверсии.

Задача 72. Найти инверсию, переводящую две данные окружности друг в друга.

Задача 73. Пусть AA', BB', CC' — высоты треугольника ABC. Три окружности проходят через произвольную точку M и точки A и A', B и B', C и C' соответственно. Доказать, что а) эти три окружности пересекаются помимо M еще в одной точке M'; б) прямая MM' проходит через ортоцентр H трегольника ABC; в) если M, M' и N, N' — две пары соответствующих таким образом точек, то они лежат на одной окружности. Определить преобразование, переводящее M в M'.

Задача 74. Точки A и B переходят друг в друга при инверсии относительно окружности w. Инверсия относительно окружности a переводит A, B, w в A', B', w'. Доказать, что точки A' и B' переходят друг в друга при инверсии относительно w'.

Задача 75. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность в диаметрально противоположных точках.

Задача 76. Пусть d_1, d_2,..., d_n — расстояния от точки M, лежащей на дуге A_1A_n окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1 \dots A_n$. Доказать, что $\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \dots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}$.

Задача 77. В треугольнике ABC обознчим через R и r радиусы описанной и вписанной окружностей, и пусть d — расстояние между их центрами. Доказать, что $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

Задача 78. Три окружности с равными радиусами проходят через точку O. Пусть A, B, C — вторые точки пересечения этих окружностей, A', B', C' — точки, диаметрально противоположные точке O (точки A и A', B и B', C и C' лежат на разных окружностях). Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников OAA', OBB', OCC', имеют кроме O еще одну общую точку.

Задача 79. Из точки O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры OK, OL, OM, ON на его стороны. Доказать, что образом четырехугольника $KLMN$ при инверсии с центром O будет параллелограмм.

Глава 5

Задачи на построение

В школьной программе задачи на построение предлагается решать с помощью циркуля и линейки. По-видимому, единственной причиной этого является историческая традиция: задачи на построение циркулем и линейкой изучались еще античными математиками. Вместе с тем интерес могут представлять также задачи на построение, в которых применяются другие инструменты. В частности, можно поставить вопрос, насколько сильно уменьшает возможности геометрических построений отсутствие одного из стандартных инструментов. Свойства геометрических преобразований позволяют дать на него ответ.

5.1. Построения одним циркулем

На первый взгляд необходимость линейки в геометрических построениях представляется очевидной: с помощью одного циркуля невозможно провести прямую. Однако задачу на построение некоторой прямой можно переформулировать как задачу нахождения двух точек этой прямой. Если теперь научиться определять с помощью циркуля точки пересечения заданных таким образом прямых друг с другом или с заданными окружностями, то любая задача, решаемая циркулем и линейкой, может быть решена одним циркулем. Последнее утверждение называется теоремой Мора—Маскерони, и при его доказательстве важную роль играет инверсия. Мы получим доказательство этой теоремы, решив последовательно несколько задач.

Задача 80. Даны две точки A и B. Построить на луче AB такую точку C, что $AC = 2 \cdot AB$.

Р е ш е н и е. Построим окружность с центром B и радиусом AB и, начиная от точки A, трижды отложим на ней отрезок, равный AB (рис. 44). Точка C, полученная после третьего откладывания, — искомая, так как по-

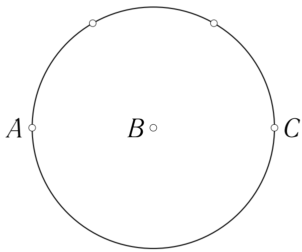

Рис. 44

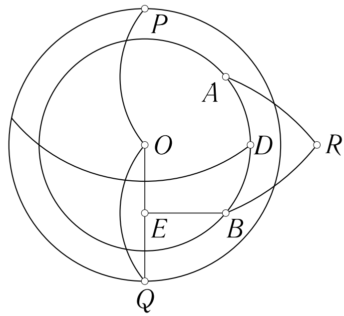

Рис. 45

строенные точки являются вершинами вписанного в окружность правильного шестиугольника.

Задача 81. Дана окружность с центром O и точки A и B на ней. Разделить дугу AB пополам.

Р е ш е н и е. Построим окружность с центром O и радиусом AB. Построим две окружности с центрами A и B, проходящие через O, и найдем точки P и Q их пересечения с построенной ранее окружностью. Тогда дуги OP и OQ равны дуге AB. Проведем две окружности с центрами P и Q и радиусами PB и QA и найдем точку R их пересечения. Пусть D — искомая середина дуги AB, E — середина отрезка OQ. Тогда прямые RO и BE перпендикулярны прямой PQ, O — середина отрезка PQ, D лежит на OR, $OB = OD$, $PR = PB$ (рис. 45). Поэтому $OR^2 = PR^2 - PO^2 = PB^2 - PO^2 = PE^2 + BE^2 - PO^2 = PE^2 + OB^2 - OE^2 - PO^2 = OB^2 + PO^2 \cdot (9/4 - 1/4 - 1) = OB^2 + PO^2 = PO^2 + OD^2 = PD^2$. Следовательно, окружность с центром P и радиусом OR пересечет дугу AB в точке D.

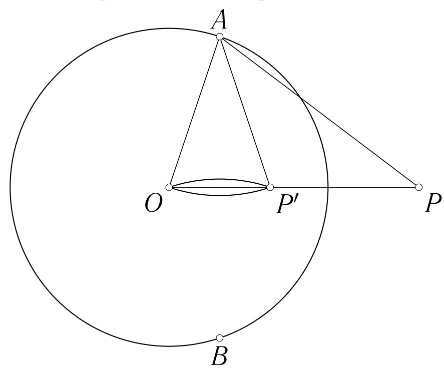

Рис. 46

Задача 82. Дана окружность с центром O и отличная от O точка P. Построить образ P' точки P при инверсии относительно данной окружности.

Р е ш е н и е. Если точка P лежит вне окружности, проведем окружность с центром P и радиусом PO и найдем точки A и B ее пересечения с данной окружностью. Проведем окружности с центрами A и B и радиусом AO. Вторая точка P' пересечения этих окружностей будет искомой в силу подобия равнобедренных треугольников POA и AOP' (рис. 46). Если точка P лежит внутри окружности, построим, как в задаче 80, на луче OP такую точку Q, что $OQ = n \cdot OP$ и Q лежит вне окружности. Затем найдем точку Q' и точку P' на луче OP, такую что $OP' = n \cdot OQ'$.

Задача 83. Даны окружность с центром O и две точки A, B. Найти точки пересечения окружности с прямой AB (предполагается, что такие точки существуют).

Р е ш е н и е. Проведем окружности с центрами A и B и радиусами OA и OB. Найдем отличную от O точку P их пересечения и построим инверсную ей точку P' (рис. 47). Окружность с центром P' и радиусом $P'O$ пересекает данную окружность в искомых точках: так как точки P и O по построению симметричны относительно AB, построенная окружность является образом AB при инверсии относительно данной окружности. Это построение не проходит, если O лежит на AB. В этом случае проведем произвольную окружность с центром A, пересекающую данную в точках C и D, и, разделив пополам две дуги с вершинами C и D, получим искомые точки пересечения.

Задача 84. Даны четыре точки A, B, C, D. Построить точку пересечения прямых AB и CD.

Р е ш е н и е. Построим окружность, внутри которой лежат все данные точки, и центр которой не лежит на искомых прямых. В соответствии с предыдущей задачей построим две окружности, являющиеся образами искомых прямых при инверсии относительно этой окружности. Отличная от O точка P' их пересечения будет инверсным образом искомой точки P. Из разрешимости задач 83, 84 вытекает справедливость теоремы Мора—Маскерони.

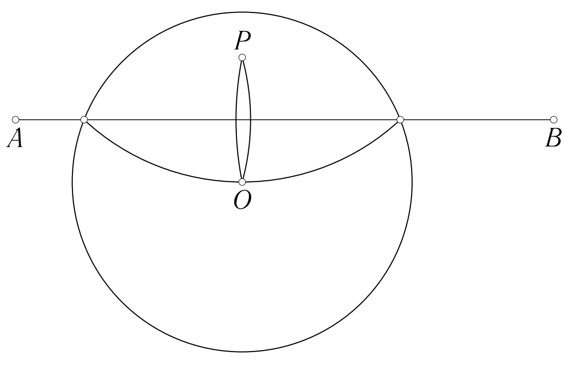

Рис. 47

5.2. Построения одной линейкой

В предыдущем параграфе было показано, что все геометрические задачи на построение, разрешимые с помощью циркуля и линейки, могут быть также решены одним циркулем. Исследуем теперь вопрос о возможностях построений одной линейкой. Отметим, кстати, что этот вопрос помимо чисто теоретического имеет определенное прикладное значение, поскольку к построениям с помощью линейки фактически сводятся геодезические измерения. Прежде всего покажем, что существуют задачи, для решения которых необходим циркуль.

Задача 85. Доказать, что с помощью одной линейки нельзя найти центр данной окружности.

Р е ш е н и е. Любое построение с помощью линейки сводится к двум элементарным операциям: проведению прямой через две построенные ранее точки и нахождению точки пересечения двух построенных ранее прямых. Результат обеих операций инвариантен относительно любых проективных преобразований, поэтому если бы некоторая их последовательность позволяла найти центр данной окружности, любое проективное преобразование, сохраняющее данную окружность, сохраняло бы и ее центр. Поскольку это неверно, задача нахождения центра окружности с помощью линейки неразрешима.

Таким образом, не все стандартные построения осуществимы без помощи циркуля. Однако верен следующий факт (*теорема Штейнера*): любая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости начерчена окружность и указан ее центр. Для доказательства этой теоремы достаточно показать, как находить точки пересечения окружностей, заданных центром и радиусом, друг с другом и с прямыми. Прежде чем решать эти задачи, рассмотрим несколько более простых.

Задача 86. Даны две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Пользуясь только линейкой, разделить AB пополам.

Р е ш е н и е. Возьмем точку E, не лежащую на данных прямых, и найдем точки пересечения D и C прямых EA и EB со второй из данных прямых. Пусть F — точка пересечения диагоналей трапеции

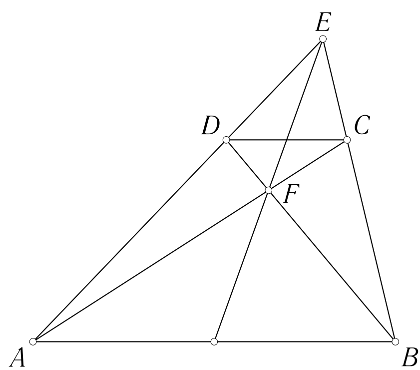

Рис. 48

$ABCD$, тогда прямая EF проходит через середины ее оснований, т.е. делит AB пополам (рис. 48).

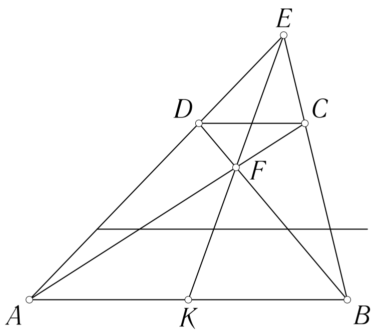

Рис. 49

Задача 87. Даны две параллельные прямые и не лежащая на них точка D. Пользуясь только линейкой, провести через D прямую, параллельную данным.

Решение. Возьмем на одной из данных прямых две точки A и B и разделим отрезок AB пополам точкой K. Проведем через данную точку D прямые AD и BD и выберем на луче AD произвольную точку E. Пусть F — точка пересечения прямых BD и EK, C — точка пересечения прямых AF и BE. Тогда прямая CD параллельна AB (рис. 49).

Задача 88. Дана окружность и точка P вне ее. Провести из P касательные PM и PN к окружности.

Решение. Проведем через точки P две прямые пересекающие окружность в точках A и B, C и D. Пусть E — точка пересечения прямых AC и BD, F — точка пересечения прямых AD и BC. Прямая EF пересекает окружность в искомых точках (рис. 50). Для доказательства достаточно спроектировать точку P в бесконечно удаленную, при этом прямые AB и CD станут параллельными, а EF перейдет в перпендикулярный им

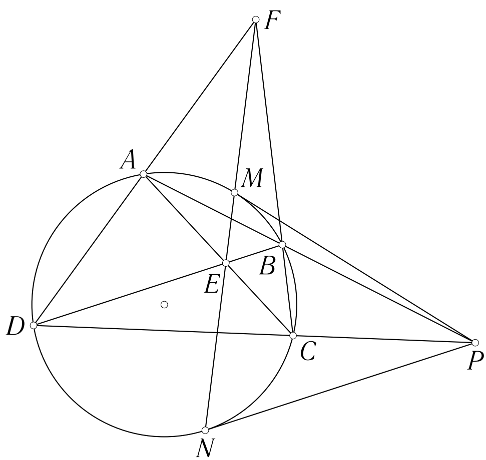

Рис. 50

диаметр. Отметим, что построенная прямая EF является полярой точки P. Это дает возможность строить полюс любой данной прямой (он является пересечением поляр двух точек прямой) и поляру точки, лежащей внутри или на окружности (как прямую, соединяющую полюса двух проходящих через данную точку прямых). В последующих задачах считается, что дана окружность и ее центр O.

Задача 89. Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

Решение. Найдем полюс данной прямой P и возьмем произвольную точку Q на прямой OP. Поляра точки Q параллельна данной прямой, поэтому дальше проходит построение задачи 87.

Задача 90. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной.

Решение. Найдем полюс P данной прямой и проведем через данную точку прямую, параллельную прямой OP. Если данная прямая проходит через O, такое построение не проходит. В этом случае построим поляру l любой точки данной прямой и проведем через данную точку прямую, параллельную l.

Задача 91. Через данную точку P провести прямую, образующую с данной прямой l угол, равный данному углу MKN.

Решение. Через точку O проведем радиусы OA, OB, OC, параллельные соответственно прямым KM, KN, l. Проведем через A прямую AD, параллельную BC, а через B — прямую BE, параллельную AC (D и E лежат на данной окружности). Углы EOC и DOC равны углу AOB, т. е. данному углу, поэтому для завершения построения осталось провести через P прямые, параллельные прямым OE и OD (рис. 51).

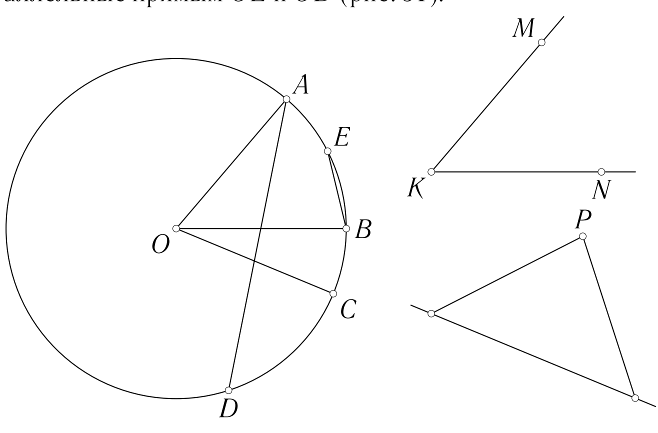

Рис. 51

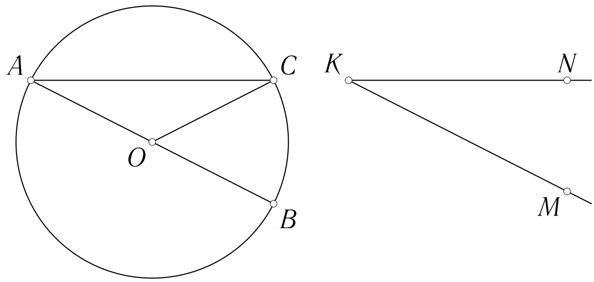

Рис. 52

Задача 92. Удвоить данный угол MKN.

Р е ш е н и е. Проведем диаметр AB, параллельный прямой MK, и хорду AC, параллельную прямой KN. Центральный угол BOC вдвое больше вписанного угла BAC, равного данному (рис. 52).

Задача 93. Построить биссектрису данного угла.

Р е ш е н и е аналогично предыдущему.

Задача 94. Дан отрезок AB и луч h с вершиной C. Построить на h такую точку D, что $CD = AB$.

Р е ш е н и е. Построим параллелограмм $OABH$ и радиус OF, параллельный h. Найдем точку E пересечения луча OH с окружностью и проведем прямую HL, параллельную прямой EF, до пересечения с OF в точке L. Построим параллелограмм $COLD$. Точка D — искомая (рис. 53).

Задача 95. Построить точки пересечения данной прямой l и неначерченной окружности с центром M и радиусом MN.

Р е ш е н и е. Проведем радиус OL, параллельный прямой MN, и найдем точку A пересечения прямых OM и LN. Так как A — центр гомотетии двух окружностей, для решения задачи надо построить образ прямой l при этой гомотетии. Возьмем на l произвольную точку B, построим отрезки

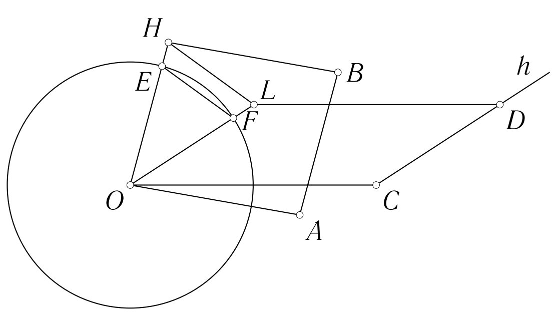

Рис. 53

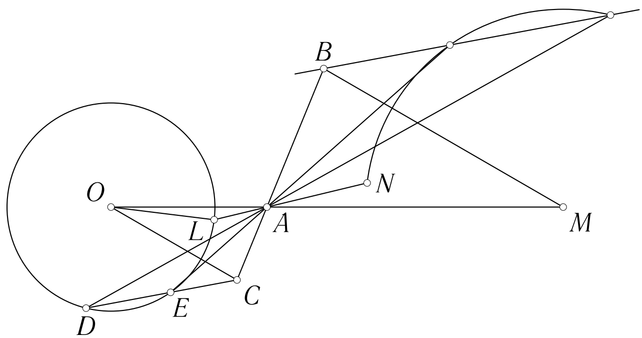

Рис. 54

BA и BM и проведем через O прямую, параллельную прямой MB, до пересечения с AB в точке C. Пусть прямая l', проходящая через C параллельно l, пересекает данную окружность в точках D и E. Прямые AD и AE пересекают l в искомых точках (рис. 54). Если точка A бесконечно удалена, можно взять вместо внешнего центра гомотетии внутренний.

Задача 96. Даны центры M, N двух окружностей и их радиусы. Построить точки пересечения окружностей.

Решение. Достаточно построить прямую, проходящую через искомые точки, и найти точки ее пересечения с любой из окружностей. Пусть A — точка окружности с центром M, B — точка другой окружности, причем хотя бы одна из этих точек не лежит на MN. Найдем середину C отрезка AB и проведем через A прямую, перпендикулярную прямой MC, а через B — прямую, перпендикулярную прямой NC. Прямая, проходящая через точку F пересечения этих прямых и перпендикулярная прямой MN, искомая. Действительно, если даны три попарно пересекающиеся окружности, то три прямые, соединяющие точки их пересечения, проходят через одну точку. Если провести окружность с центром C и радиусом CA, то прямые AF и BF будут по построению проходить через точки пересечения этой окружности с данными. Следовательно, прямая, проходящая через точки пересечения данных окружностей, также проходит через F, причем она должна быть перпендикулярна линии центров MN (рис. 55).

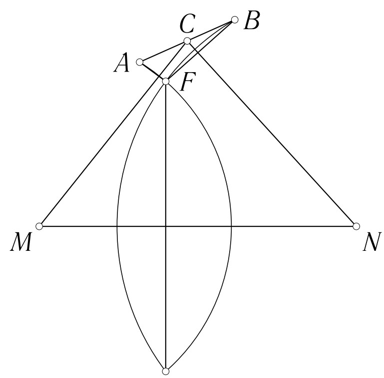

Рис. 55

Решение задач 95, 96 доказывает теорему Штейнера. Отметим, что верен более сильный результат: любое построение, осуществимое циркулем и линейкой, можно осуществить одной линейкой, если на плоскости начерчена дуга окружности и дан ее центр. Нетрудно также доказать осуществимость любых построений, если на плоскости начерчены две пересекающихся, касающихся или концентрических окружности, либо три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. В то же время, если даны две непересекающихся и не концентрических окружности, то построить их центры с помощью одной линейки нельзя. Отсюда вытекает следующий любопытный результат.

Задача 97. Доказать, что проективное преобразование, переводящее две концентрические окружности в окружности, является подобием.

Решение. Так как две концентрических окружности позволяют проводить любые стандартные построения, а две непересекающихся — нет, концентрические окружности могут переходить только в концентрические. Тогда их общий центр должен сохраняться, а значит, сохраняется и являющаяся его полярой бесконечно удаленная прямая. Следовательно, данное преобразование является аффинным, а аффинное преобразование, сохраняющее произвольную окружность, является подобием.

Глава 6

Геометрические преобразования и комплексные числа

В этой главе мы исследуем связь между геометрическими преобразованиями и комплексными числами. Напомним, что комплексное число это выражение вида $a+bi$, где a, b — произвольные действительные числа. Сложение и умножение комплексных чисел производится аналогично сложению и умножению многочленов, причем считается, что $i^2=-1$. Комплексное число $z=a-bi$ называется сопряженным числу $z=a+bi$. Нетрудно убедиться, что сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами, причем произведение ненулевых сопряженных чисел всегда положительно. Любое ненулевое комплексное число можно представить в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где положительное число r, называемое модулем z, определяется однозначно, а угол φ, называемый аргументом числа z, — с точностью до слагаемого, кратного 2π. Комплексному числу $z=a+bi$ взаимно однозначно соответствует точка плоскости с координатами $(a,\ b)$, при этом модуль числа z равен расстоянию от z до начала координат O, а аргумент — углу между вектором $\overrightarrow{Oz}$ и положительным направлением оси OX (рис. 56). Оси OX и OY называют также действительной и мнимой осями. Произвольное преобразование плоскости ставит в соответствие каждому комплексному числу z комплексное число z', являющееся функцией числа z. Наша задача — получить выражения для функций, соответствующих некоторым из рассмотренных преобразований.

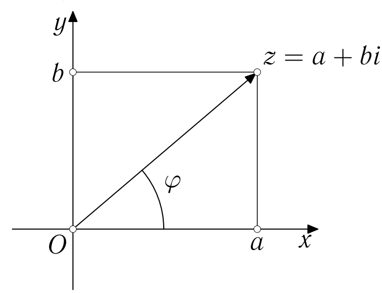

Рис. 56

6.1. Комплексная интерпретация движения и подобия

Рассмотрим преобразование комплексной плоскости, заданное формулой $z' = az$, где a — комплексное число с единичным модулем. Возьмем две произвольные точки плоскости, соответствующие комплексным числам z_1 и z_2. Расстояние между ними равно $|z_1 - z_2|$, а расстояние между их образами $|az_1 - az_2|$. Но нетрудно проверить, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, следовательно, $|az_1 - az_2| = |a(z_1 - z_2)| = |a\,\|\,z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$, т. е. рассматриваемое преобразование является движением. Так как уравнение $z = az$ имеет единственное решение $z = 0$, это движение будет по теореме Шаля поворотом вокруг начала координат. Чтобы определить угол поворота, достаточно рассмотреть его действие на произвольную точку плоскости. Так как $z = 1$ переходит в $z' = a$, угол поворота равен $\arg(a)$. Возьмем теперь два числа a и b с единичными модулями. Композиция поворотов $z' = az$ и $z'' = bz'$ даст поворот $z'' = abz$ на угол, равный $\arg(ab)$. С другой стороны, эта композиция есть поворот на угол $\arg(a) + \arg(b)$. Тем самым доказано, что при умножении двух комплексных чисел с единичными модулями их аргументы складываются. Ясно, что этот результат останется верным и для чисел с произвольными модулями. Тем самым доказана такая теорема.

Т е о р е м а. При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Частным случаем этой теоремы является формула Муавра: $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Рассмотрим теперь произвольное движение. Очевидно, что его можно представить в виде композиции поворота вокруг начала координат, параллельного переноса и, возможно, симметрии относительно оси OX. Но параллельный перенос задается формулой $z' = z + b$, где b — число, соответствующее вектору переноса, а симметрия относительно OX — сопряжением $z' = \overline{z}$. Следовательно, любое движение задается формулой $z' = az + b$ или $z' = a\overline{z} + b$, где a и b — некоторые комплексные числа, причем $|a| = 1$. Первая формула соответствует движениям, сохраняющим ориентацию, вторая — меняющим. Легко проверяется также, что любая формула такого вида определяет движение. Так как любое подобие можно представить как композицию движения и гомотетии с центром в начале координат, которая задается формулой $z' = kz$, получаем, что подобию соответствует формула $z' = az + b$ или $z' = a\overline{z} + b$ с произвольными a и b, причем коэффициент подобия равен $|a|$.

Задача 98. Доказать, что аффинному преобразованию комплексной плоскости соответствует функция $z' = az + b\overline{z} + c$, где a, b, c — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|a| \neq |b|$.

6.2. Комплексная интерпретация круговых преобразований

Для того чтобы получить формулы круговых преобразований, воспользуемся тем фактом, что произвольное круговое преобразование представимо в виде композиции инверсии и движения. Прежде всего найдем формулу для инверсии относительно единичной окружности $|z| = 1$. Пусть z' — образ точки z при инверсии относительно единичной окружности. Тогда $|z|\,|z'| = 1$, $\arg(z') = \arg(z)$. Отсюда следует, что $\overline{z}z' = 1$, т. е. $z' = 1/z$ (рис. 57). Так как произвольная окружность может быть переведена в единичную подобием, произвольное круговое преобразование задается композицией линейных функций, сопряжения и функции $z' = 1/z$. Такие композиции приводят к дробно-линейным функциям вида $z' = (az + b)/(cz + d)$ или $z' = (a\overline{z} + b)/(c\overline{z} + d)$. С другой стороны, любая функция такого вида представляется как композиция линейных функций и операций обращения и сопряжения и, следовательно, сохраняет окружности. Отметим, что для данного преобразования коэффициенты a, b, c, d определены не однозначно, а с точностью до общего множителя. При этом, поскольку числитель и знаменатель дроби не могут быть пропорциональны, выражение $ad - bc$ отлично от нуля и можно, выбирая этот множитель, сделать его равным единице. Укажем несколько следствий выведенной формулы.

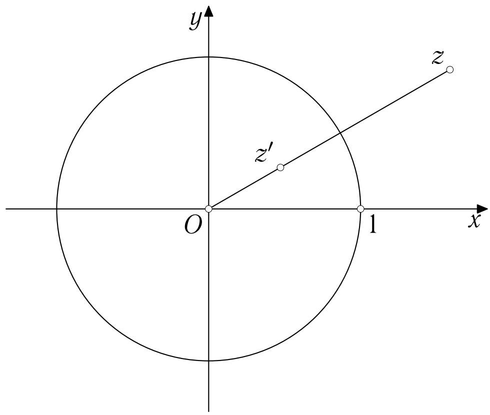

Рис. 57

Т е о р е м а 1. Для любых шести точек A, B, C, A', B', C' существует ровно два круговых преобразования, переводящих A в A', B в B', C в C'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать преобразование вида $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Из условия теоремы следует, что коэффициенты a, b, c, d удовлетворяют трем линейным уравнениям. Непосредственно проверяется, что эти уравнения позволяют определить коэффициенты с точностью до общего множителя, т. е. искомое преобразование находится однозначно. Преобразование второго рода получается как композиция найденного преобразования первого рода и инверсии относительно окружности $A'B'C'$.

О п р е д е л е н и е. **Двойным отношением** четырех комплексных чисел a, b, c, d называется комплексное число $(ab;\, cd) = \dfrac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$.

Т е о р е м а 2. Для восьми точек A, B, C, D, A', B', C', D' круговое преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C', D в D', существует тогда и только тогда, когда для соответствующих комплексных чисел $(ab;\, cd) = (a'b';\, c'd')$ или $(\bar{a}\bar{b};\, \bar{c}\bar{d}) = (a'b';\, c'd')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость проверяется непосредственным вычислением. Достаточность следует из теоремы 1.

Исследуем геометрический смысл двойного отношения. Модуль его равен отношению длин противоположных сторон четырехугольника $ACBD$, а аргумент — аргументу суммы его углов A и B. Отсюда, в частности, следует, что двойное отношение четырех точек является действительным числом тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой или окружности. Кроме того, теорема 2 показывает, что вершины двух четырехугольников могут быть переведены друг в друга круговым преобразованием тогда и только тогда, когда две указанных характеристики у них совпадают.

Задача 99. Даны два треугольника — ABC и $A'B'C'$. Доказать, что существует инверсия, переводящая треугольник ABC в треугольник, равный $A'B'C'$.

Задача 100. Дан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что существует инверсия, переводящая его вершины в вершины параллелограмма, причем все параллелограммы, полученные в результате таких инверсий, подобны.

Задача 101. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, M — произвольная точка. Окружности, описанные около треугольников AMB и CMD, пересекаются в точке E, а окружности описанные около треугольников BMC и DMA, — в точке F. Доказать, что окружности, описанные около треугольников ABF, CDF, BCE, ADE, пересекаются в одной точке N, причем точки M, E, N, F лежат на одной окружности.

Глава 7

Модели неевклидовой геометрии

7.1. Аксиоматическое изложение геометрии

Строгое изложение любой математической дисциплины начинается с введения исходных (неопределяемых) объектов и формулировок **аксиом**, т. е. свойств этих объектов, которые принимаются без доказательств. Остальные свойства выводятся из аксиом и называются **теоремами**. Для евклидовой планиметрии исходными объектами считаются **точка, прямая, отношение «лежать между» и движение**, а список аксиом имеет следующий вид.

1. Аксиомы принадлежности.

1. 1. Через две различные точки проходит одна и только одна прямая.

1. 2. Любая прямая содержит по крайней мере две различные точки.

1. 3. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

2. Аксиомы порядка.

2. 1. Из трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

2. 2. На прямой AB существует бесконечно много точек, лежащих между A и B, и бесконечно много таких точек, что B лежит между A и каждой из этих точек.

2. 3. Точка O, лежащая на прямой, разделяет остальные точки этой прямой на два класса, так что O лежит между любыми двумя точками разных классов и не лежит между любыми двумя точками одного класса.

2. 4. Всякая прямая делит плоскость на две выпуклые области.

3. Аксиомы движения.

3. 1. Движения образуют группу.

3. 2. Любое движение переводит отрезок в отрезок.

3. 3. Если A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, то существует одно и только одно движение, которое переводит:

а) точку A в заданную точку A';

б) луч AB в заданный луч $A'B'$;

в) точку C в некоторую точку заданной полуплоскости, ограниченной прямой $A'B'$.

3. 4. Существуют движения, переводящие отрезок AB в отрезок BA и угол AOB в угол BOA.

4. Аксиомы непрерывности.

4. 1. Аксиома Дедекинда: если точки ориентированной прямой разбиты на два класса так, что любая точка первого класса предшествует любой точке второго, то существует либо последняя точка первого класса, либо первая точка второго.

5. Аксиомы параллельности.

5. 1. Пятый постулат Евклида: через точку вне прямой можно провести только одну прямую, не пересекающую данную.

Впервые эти аксиомы (в другой форме) были сформулированы Евклидом. Попытки вывести пятый постулат из остальных математики предпринимали вплоть до XIX в., когда Н. И. Лобачевский предложил заменить пятый постулат новым: через любую точку вне данной прямой проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих ее. Теория, основанная на новых аксиомах, получила название **геометрии Лобачевского**. Чтобы доказать, что в геометрии Лобачевского не может возникнуть противоречия и, тем самым, пятый постулат Евклида не может быть выведен из остальных, необходимо построить ее **модель**, т. е. указать такие реальные объекты, которые могут рассматриваться в качестве точек и прямых геометрии Лобачевского и при этом все аксиомы будут выполнены. Две таких модели, построенные с помощью геометрических преобразований, и будут рассмотрены ниже.

7.2. Модель Клейна

В **модели Клейна** точками являются точки внутренности некоторого круга, прямыми — хорды этого круга, движениями — проективные преобразования, переводящие круг в себя.

Т е о р е м а. В модели Клейна выполнены все аксиомы геометрии Лобачевского.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение всех аксиом, кроме 3.3, очевидно. Для доказательства аксиомы 3.3 рассмотрим сначала случай, когда точка A' совпадает с центром круга O.

Согласно теореме 1 п. 3.3 существует проективное преобразование, сохраняющее круг и переводящее A в O. Совершив затем поворот вокруг O, переведем луч AB в луч OB'. Если точка C при этом не оказалась в нужном полукруге, сделаем симметрию относительно прямой OB'. Существование искомого движения доказано.

В общем случае переведем сначала точку A в O, а потом аналогично O в A'.

Для доказательства единственности заметим, что если прямая AB пересекает граничную окружность (как правило, ее называют **абсолютом**) в точках A_1 и A_2, то образы этих точек определяются однозначно. Также определен образ полюса M прямой A_1A_2, а значит, и точек пересечения прямой MA с абсолютом. По образам четырех точек проективное преобразование строится однозначно, что и доказывает теорему.

Выясним теперь, как определять в модели Клейна расстояния между точками и углы между прямыми. Рассмотрим две точки A и B. Ясно, что расстояние должно сохраняться при движениях. Поскольку проективные преобразования сохраняют двойные отношения точек на прямой, естественно считать, что расстояние AB определяется двойным отношением $(AB;\, XY)$, где X, Y — точки пересечения прямой AB с абсолютом. Чтобы выяснить, как именно расстояние зависит от двойного отношения, возьмем произвольную точку C на отрезке AB. Нетрудно видеть, что выполняется соотношение $(AB;\, XY) = (AC;\, XY)(CB;\, XY)$. Поэтому, для того чтобы расстояние AB равнялось сумме расстояний AC и CB, примем следующее определение.

Определение. Расстоянием между точками A и B называется число $|\log(AB;\, XY)|$, где X, Y — точки пересечения прямой AB с абсолютом.

Поскольку переход от одного основания логарифма к другому приводит к умножению логарифма на постоянный множитель, основание можно брать произвольно. Выбор основания равносилен выбору единицы измерения расстояния.

Сложнее измерять в модели Клейна углы. Для того чтобы измерить угол между прямыми AC и BC, нужно перевести точку C в центр круга O и измерить обычный угол между прямыми OA' и OB' (A', B' — образы точек A, B)

Задача 102. Доказать, что две прямые в модели Клейна перпендикулярны тогда и только тогда, когда каждая из них проходит через полюс другой.

Решение. Переведем точку пересечения прямых в центр круга. Так как полюсом диаметра круга является бесконечно удаленная точка, прямых, перпендикулярных диаметру, утверждение доказано.

Будем называть две прямые геометрии Лобачевского **параллельными**, если соответствующие им в модели Клейна хорды пересекаются на абсолюте, и **расходящимися**, если они пересекаются вне круга. Эти определения позволяют уточнить формулировку пятого постулата: через любую точку вне прямой можно провести две параллельных ей прямых и бесконечно много расходящихся.

Множество всех прямых, параллельных данной «в одном направлении», назовем **пучком**. Очевидно, что в модели Клейна пучку параллельных прямых соответствует множество хорд, проходящих через данную точку абсолюта.

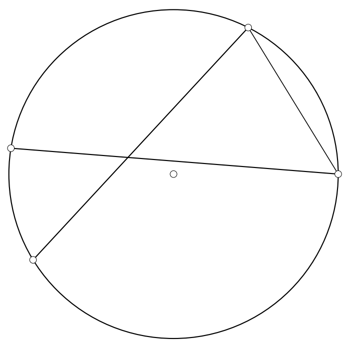

Рис. 58

Задача 103. Существует ли прямая, пересекающая все прямые из данного пучка параллельных?

Р е ш е н и е. Очевидно, что для любых двух прямых найдется прямая, параллельная им обеим (рис. 58). Следовательно, ответ на вопрос задачи отрицателен.

Задача 104. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Р е ш е н и е. Пусть C' — середина отрезка AB. Непосредственное вычисление показывает, что евклидовы длины отрезков AC' и BC' удовлетворяют равенству $\dfrac{AC'}{BC'} = \sqrt{\dfrac{AX \cdot AY}{BX \cdot BY}}$, где X, Y — точки пересечения прямой AB с абсолютом. Отсюда следует, что прямые AA', BB', CC', где A', B' — середины отрезков BC и AC, удовлетворяют теореме Чевы и, значит, пересекаются в одной точке.

Задача 105. Верно ли, что медианы делятся точкой пересечения в постоянном отношении?

Р е ш е н и е. Рассматривая правильные треугольники с центром в точке O, нетрудно убедиться, что отношение, в котором медианы делятся точкой пересечения, зависит от длины стороны. Следовательно, ответ на вопрос задачи отрицательный.

Задача 106. а) Доказать, что если две высоты треугольника пересекаются, то третья высота проходит через точку их пересечения.

б) Доказать, что если две высоты треугольника параллельны, то третья также им параллельна.

в) Доказать, что если высоты треугольника расходятся, то существует прямая, которая им всем перпендикулярна.

Р е ш е н и е. Переведем одну из вершин треугольника в точку O. Тогда

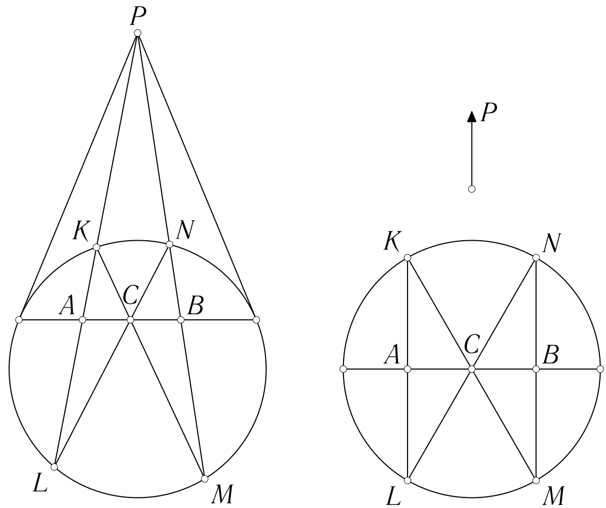

Рис. 59

его высоты будут перпендикулярны сторонам в евклидовом смысле и, значит, пересекутся в одной (евклидовой) точке. Если эта точка лежит внутри круга, значит высоты пересекаются в одной точке. Если точка пересечения лежит на абсолюте, высоты параллельны. Если же точка пересечения лежит вне круга, то ее поляра перпендикулярна всем трем высотам.

Задача 107. Дана окружность и точки A, B внутри нее. Пользуясь только линейкой, построить точку C, которая в модели Клейна является серединой отрезка AB.

Р е ш е н и е. Построим полюс P прямой AB. Пусть прямая PA пересекает окружность в точках K и L, а прямая PB — в точках N и M. Тогда точка пересечения диагоналей четырехугольника $KLMN$ — искомая середина. Для доказательства достаточно перевести точку C в центр круга O (рис. 59).

7.3. Модель Пуанкаре

В **модели Пуанкаре** точками являются точки внутренности некоторого круга или точки полуплоскости (без границы), прямыми — дуги окружностей, перпендикулярных границе круга (полуплоскости), движениями — круговые преобразования, переводящие круг (полуплоскость) в себя.

Т е о р е м а. В модели Пуанкаре выполнены все аксиомы геометрии Лобачевского.

Доказательство. Аналогично доказательству для модели Клейна.

Расстояние между точками в модели Пуанкаре определяется так же, как в модели Клейна (двойное отношение точек окружности — это двойное отношение соответствующих им комплексных чисел, которое, как показано в теореме 2 п. 6.2, всегда является действительным числом). Отметим, что для работы с расстояниями модель Пуанкаре менее удобна, чем модель Клейна, но она оказывается значительно эффективнее для работы с углами. Поскольку круговые преобразования сохраняют углы, угол между прямыми геометрии Лобачевского равен евклидову углу между изображающими их окружностями. Еще одним достоинством модели Пуанкаре является следующий факт.

Задача 108. Доказать, что окружность геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре изображается окружностью.

Решение. Рассмотрим модель Пуанкаре в круге. Очевидно, что любая окружность геометрии Лобачевского, центр которой совпадает с центром круга, изображается окружностью. Поскольку центр любой окружности можно движением перевести в точку O, а движение является круговым преобразованием евклидовой плоскости, т. е. сохраняет окружности, любая окружность геометрии Лобачевского изображается окружностью. Отметим, что при этом центр окружности Лобачевского не совпадает с центром ее евклидова образа.

Для модели Пуанкаре в полуплоскости утверждение задачи следует из того, что полуплоскость можно круговым преобразованием перевести во внутренность круга. При этом окружности перейдут в окружности и перпендикулярность окружностей абсолюту также сохранится.

Задача 109. Верно ли, что около любого треугольника можно описать окружность?

Решение. Если около треугольника можно описать окружность, то по предыдущей задаче она в модели Пуанкаре будет изображаться окружностью, проходящей через вершины треугольника. Поскольку эта окружность может пересекать абсолют, ответ на вопрос задачи отрицательный. Можно, однако, показать, что серединные перпендикуляры к сторонам любого треугольника либо пересекаются в одной точке (в этом случае описанная окружность существует), либо параллельны, либо перпендикулярны одной прямой.

Задача 110. Выведите формулы, задающие движение в модели Пуанкаре, если плоскость Лобачевского изображается

а) единичным кругом комплексной плоскости;

б) верхней полуплоскостью комплексной плоскости.

Решение. а) Как было показано в п. 6.2, любое круговое преобразование задается дробно-линейной функцией. Рассмотрим для определенности преобразование, сохраняющее ориентацию. Пусть точка a переходит в 0. Тогда инверсная ей относительно единичной окружности точка $1/\overline{a}$ переходит в ∞. Следовательно, преобразование задается формулой $z' = \alpha\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$. Подставив $z=1$, убеждаемся, что $|\alpha|=1$. Аналогично для преобразования, меняющего ориентацию, получаем $z' = \alpha\dfrac{\overline{z}-a}{\overline{a}\overline{z}-1}$.

б) Любое круговое преобразование имеет вид $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ либо $z' = \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$. Так как любое действительное число должно переходить в действительное, числа a, b, c, d должны быть действительными. Подставив $z=i$, убеждаемся, что преобразования первого рода оставляют i в верхней полуплоскости при $ad-bc>0$, а преобразования второго рода — при $ad-bc<0$.

Задача 111. Рассмотрим модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости. Найти

а) множество точек, расположенных на данном расстоянии от прямой OY;

б) середину отрезка $[i,\ 2i]$;

в) движения плоскости Лобачевского, которые переводят точку $1+i$ в $-\dfrac{1-i}{2}$, а $-1+i$ в $\dfrac{1+i}{2}$;

г) Точку, симметричную точке z относительно точки i.

Решение. а) Перпендикуляром, опущенным из точки Z на OY, является дуга окружности с центром в начале координат и радиусом OZ. Если эта окружность пересекает луч OY в точке C, а прямую OX — в точках A и B, то искомое расстояние равно $|\log(AB;\ CZ)|$. Очевидно, что это двойное отношение определяется углом COZ. Таким образом, искомым множеством будут два луча, выходящих из O и симметричных относительно OY. Отметим, что эти лучи не являются прямыми геометрии Лобачевского. Применяя соответствующее преобразование, нетрудно вывести, что если прямая геометрии Лобачевского изображается дугой окружности, пересекающей абсолют в точках P и Q, то множество точек, находящихся от нее на данном расстоянии, изображается двумя дугами окружностей, также проходящих через эти точки (рис. 60).

б) Так как прямая, проходящая через i и $2i$, — это ось OY, серединным перпендикуляром к отрезку $[i,\ 2i]$ будет окружность с центром O. При инверсии относительно этой окружности точки i и $2i$ переходят друг в друга, следовательно, ее радиус равен $\sqrt{2}$, и искомой серединой будет точка $i\sqrt{2}$.

в) Очевидно, что движения $z' = -1/z$ и $z' = -\overline{z}/2$ удовлетворяют условиям задачи. Поскольку для движений плоскости Лобачевского верна

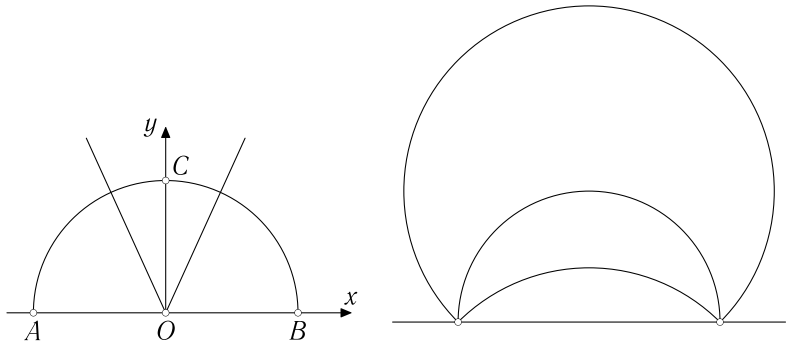

Рис. 60

лемма о двух гвоздях (ее доказательство аналогично евклидову случаю), других таких движений нет.

г) Симметрия относительно точки i сохраняет ориентацию и, значит, имеет вид $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — действительные числа. Так как i является корнем уравнения $z' = z$, мы получаем, что $a = d$ и $c = -b$. Кроме того, это преобразование переводит 0 в ∞. Следовательно, $a = d = 0$, и образом точки z будет точка $z' = -1/z$.

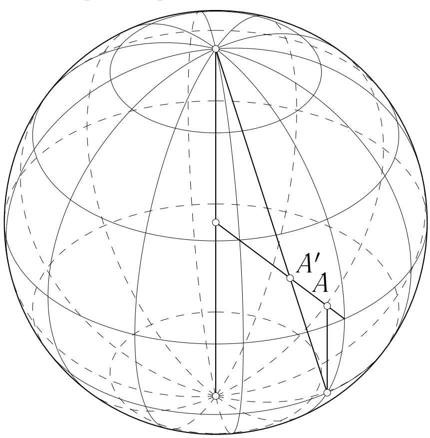

Рис. 61

В заключение опишем связь между моделями Клейна и Пуанкаре. Возьмем сферу, экватор которой совпадает с абсолютом модели Клейна. Через точку A внутри абсолюта проведем прямую, перпендикулярную его плоскости, и найдем точку ее пересечения с «южным» полушарием сферы. Соединим эту точку с «северным полюсом» и найдем точку A' пересечения этой прямой с плоскостью абсолюта (рис. 61). Точку A' можно рассматривать как точку модели Пуанкаре. Действительно, прямые модели Клейна при таком преобразовании сначала перейдут в расположенные на сфере полуокружности, перпендикулярные ее экватору, а затем в дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту, т. е. в прямые модели Пуанкаре.

Решения задач

3. Пусть $AMNB$ — произвольная дорога, соединяющая A с B, а M, N — точки на берегах реки, соединенные мостом. Тогда длина дороги равна длине ломаной $A'NB$, где A' — образ точки A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Следовательно, дорога будет кратчайшей, если N — точка пересечения соответствующего берега реки с прямой $A'B$ (рис. 62).

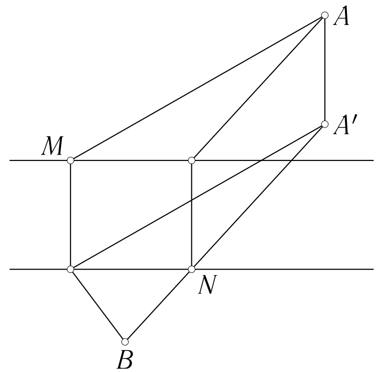

Рис. 62

4. При переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$ точки A и B перейдут соответственно в D и C. Поэтому точки D и C являются точками пересечения второй окружности и образа первой при этом переносе. Поскольку в условии не указано, направлены ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN}$ в одну или противоположные стороны, следует рассмотреть также возможность переноса первой окружности на вектор $\overrightarrow{NM}$. Задача может иметь два, одно или ни одного решения в зависимости от наличия точек пересечения у указанных окружностей (рис. 63).

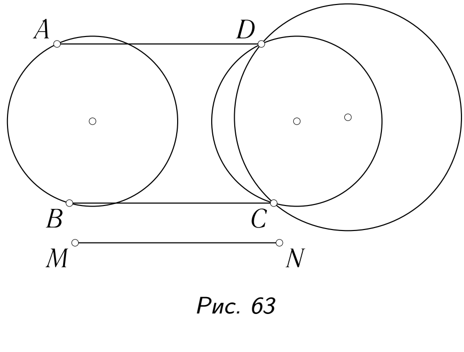

Рис. 63

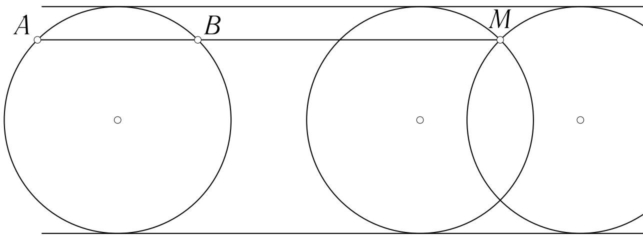

Рис. 64

5. Построим произвольную окружность, касающуюся данных прямых, и найдем точки A и B ее пересечения с прямой, проходящей через данную точку M и параллельной данным прямым. Параллельные переносы построенной окружности на векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ дают две окружности, удовлетворяющие условию задачи (рис. 64).

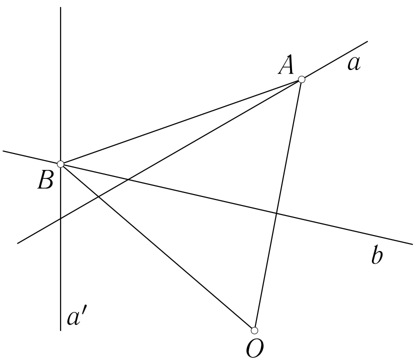

Рис. 65

8. При повороте на угол $\pi/3$ вокруг точки O точка A переходит в B. Следовательно, точка B является точкой пересечения, b с образом a' прямой a при этом повороте. Другое решение получается, если повернуть прямую a на угол $5\pi/3$. Если угол между прямыми a и b равен $\pi/3$, то при одном из этих поворотов соответствующие прямые оказываются параллельными или совпадающими. В первом случае задача имеет единственное решение, во втором бесконечное множество. Во всех остальных случаях задача имеет два решения (рис. 65).

9. Пусть M — произвольная точка в треугольнике ABC. При повороте вокруг точки A на угол $\pi/3$ треугольник AMB переходит в треугольник $AM'B'$. Так как треугольник AMM' правильный, $AM + BM + CM = B'M' + M'M + MC$. Наименьшее значение эта сумма принимает, когда точки M и M' лежат на отрезке $B'C$. В этом случае угол AMC равен $2\pi/3$. Аналогично доказывается, что углы AMB и BMC равны $2\pi/3$, т. е. искомой будет точка M, из которой все стороны треугольника видны под равными углами (M называется **точкой Торричелли**). Отметим, что попутно мы доказали следующий интересный факт: если на сторонах треугольника ABC построить во внешнюю сторону правильные треугольники ABC', BCA', CAB', то $AA' = BB' = CC'$ (рис. 66).

10. Если прямая, проходящая через точку M пересечения окружностей, высекает на них равные хорды MA и MB, то точки A и B симметричны относительно M. Следовательно, точка A будет отличной от M точкой пересечения одной из данных окружностей с окружностью, симметричной второй, относительно M (рис. 67).

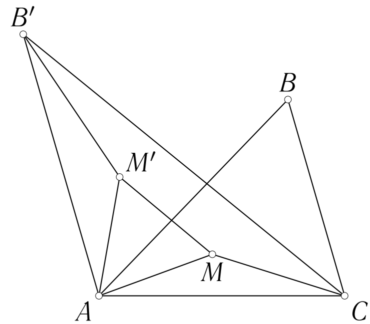

Рис. 66

11. Пусть L — середина отрезка AB. При повороте на угол $-\pi/2$ вокруг центра квадрата $BCPQ$ точка B перейдет в C, C в P, A — в такую точку D, что отрезки AB и PD перпендикулярны и равны. Но тогда отрезки PD и CM равны и параллельны, т. е. $CMDP$ — параллелограмм. Следовательно, точка K — середина отрезка CD, т. е. образ точки L. Значит отрезки BL и CK равны и перпендикулярны (рис. 68).

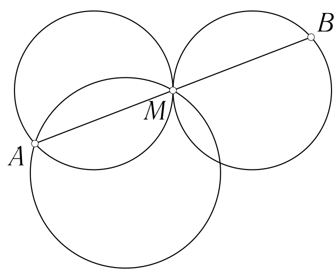

Рис. 67

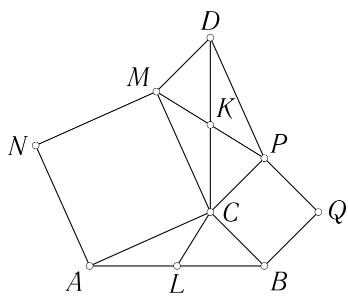

Рис. 68

15. Задачу можно переформулировать так: среди треугольников с данными основанием и высотой найти треугольник с наименьшим периметром, т. е. на прямой, параллельной отрезку AB, найти такую точку C, чтобы ломаная ACB имела наименьшую длину. Так как длина ломаной ACB равна длине ломаной $A'CB$, где точки A и A' симметричны относительно данной прямой, она не может быть короче отрезка $A'B$. Очевидно, что этот минимум достигается, когда $AC = CB$ (рис. 69). Следовательно, максимальную площадь среди всех треугольников имеет равнобедренный.

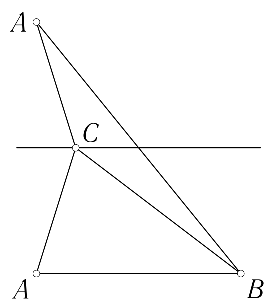

Рис. 69

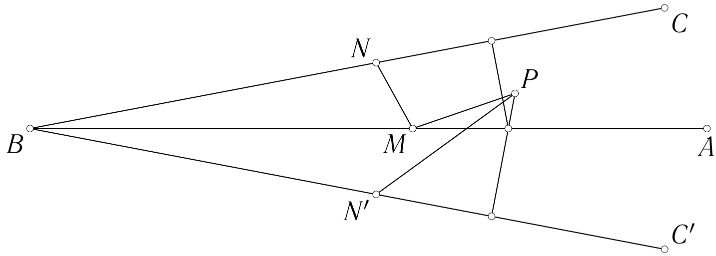

Рис. 70

16. Пусть гонец движется по ломаной PMN (точка M лежит на AB, точка N — на BC). Длина этой ломаной равна длине ломаной PMN', где точка N' симметрична точке N относительно AB. Очевидно, что длина ломаной PMN' не меньше длины отрезка PN', который в свою очередь не короче перпендикуляра, опущенного из P на прямую BC', симметричную прямой BC. Следовательно, точка M должна быть точкой пересечения этого перпендикуляра с AB (рис. 70).

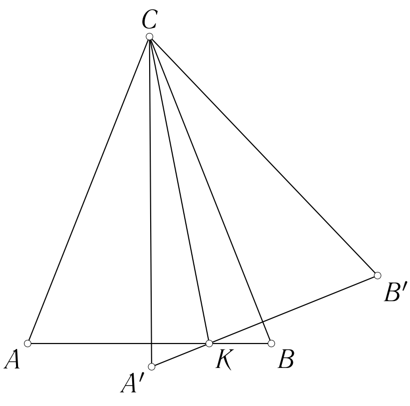

Рис. 71

17. Так как углы ACB и $A'CB'$ равны, биссектрисы углов ACB' и $A'CB$ совпадают. При симметрии относительно этой биссектрисы прямые CA и CB', CB и CA' переходят друг в друга. Так как $AC = BC = A'C = B'C$, друг в друга перейдут точки A и B', A' и B и прямые AB и $A'B'$. Поэтому точка K пересечения этих прямых останется неподвижной. Это возможно, только если она лежит на оси симметрии (рис. 71).

21. Решение сразу следует из теоремы Шаля и задач 12, 13.

22. Пусть вершины K, L, M, N параллелограмма лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA четырехугольника. Композиция центральных симметрий с центрами K, L, M переводит A в D. С другой стороны, из задачи 19 следует, что эта композиция является центральной симметрией, причем ее центром будет точка N (достаточно проверить, что N — неподвижная точка). Следовательно, N — середина отрезка AB.

23. Рассмотрим композицию центральных симметрий относительно середин сторон AB, BC, CD, DE, EA искомого пятиугольника. Согласно задаче 19 эта композиция будет центральной симметрией, а поскольку она

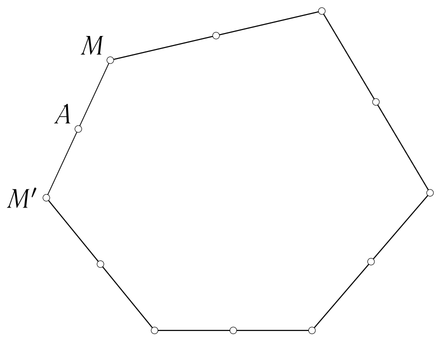

Рис. 72

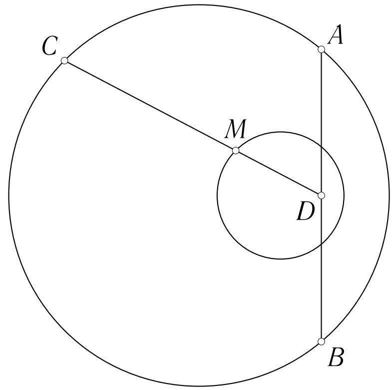

Рис. 73

оставляет точку A неподвижной, A является ее центром. Следовательно, A — середина отрезка MM', где M — произвольная точка плоскости, а M' — ее образ (рис. 72).

28. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC, D — середина отрезка AB. Из свойства медиан треугольника следует, что M лежит на отрезке DC и $DM = DC/3$. Это означает, что M — образ точки C при гомотетии с центром D и коэффициентом $1/3$, а геометрическим местом таких точек будет окружность, являющаяся образом данной окружности при этой гомотетии (рис. 73).

29. Пусть A — данная точка, AD — произвольная хорда большей окружности, B, C — точки пересечения AD с меньшей окружностью. Так как $AB = CD$ для любой хорды, достаточно выполнить условие $AB = BC$. Но это условие означает, что точка B образ — точки C при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$, следовательно, B — точка пересечения меньшей окружности и ее образа при указанной гомотетии (рис. 74). В зависимости от отношения t радиуса меньшей окружности к радиусу большей задача может иметь два (при $t > 1/3$), одно ($t = 1/3$) или ни одного ($t < 1/3$) решения.

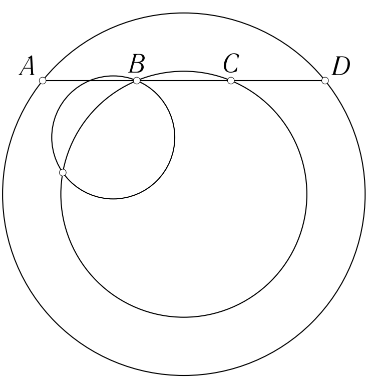

Рис. 74

30. Из условия задачи следует, что окружность с центром в искомой точке M и радиусом MC касается стороны OA. Возьмем на OB произволь-

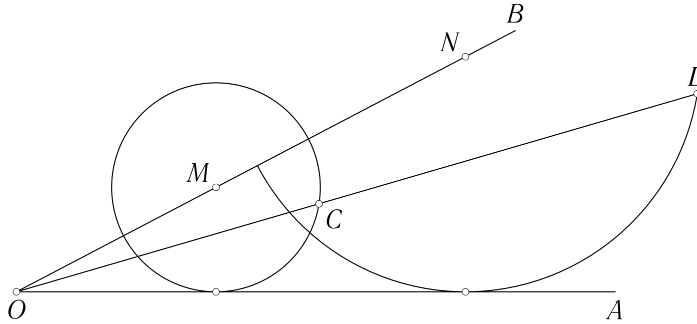

Рис. 75

ную точку N, построим окружность с центром N, касающуюся стороны OA, и найдем точку D ее пересечения с прямой OC. Гомотетия с центром O, переводящая D в C, переводит построенную окружность в окружность, удовлетворяющую условию задачи, а точку N — в искомую точку M. Так как прямая OC пересекается с окружностью в двух точках, задача имеет два решения (рис. 75).

31. Пусть AA', BB', CC' — медианы искомого треугольника ABC, а M — точка их пересечения. Построим точку M', симметричную точке M относительно C'. В треугольнике BMM' выполнены соотношения $BM = 2 \cdot BB'/3$, $BM' = AM = 2 \cdot AA'/3$, $MM' = 2 \cdot MC' = 2 \cdot CC'/3$, т. е. этот треугольник подобен треугольнику, стороны которого равны медианам исходного с коэффициентом $2/3$. Но по треугольнику BMM' треугольник ABC восстанавливается однозначно (точка A центрально симметрична точке B относительно середины C' стороны MM', C — образ точки M при гомотетии с центром C' и коэффициентом 3) (рис. 76). Отметим, что, так как 6 треугольников, на которые треугольник ABC разбивается медианами, равновелики, площадь треугольника BMM' равна $1/3$ площади ABC, а площадь подобного ему треугольника из медиан равна $1/3 \cdot 9/4 = 3/4$ площади ABC.

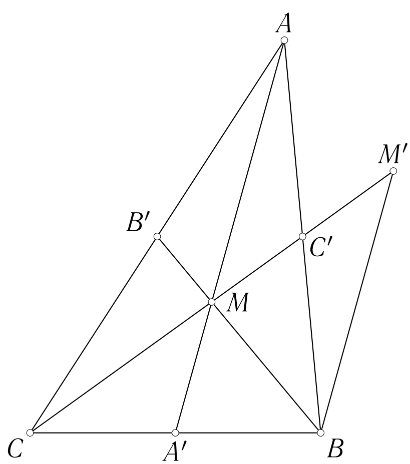

Рис. 76

32. Так как площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, стороны искомого треугольника обратно пропор-

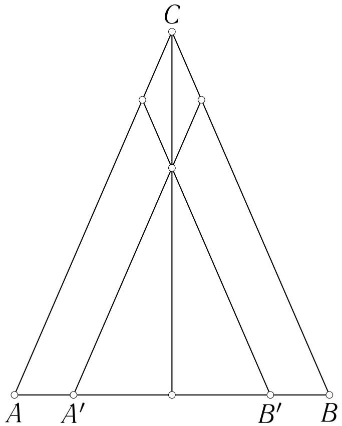

Рис. 77

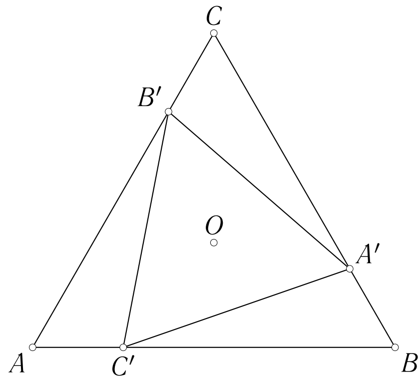

Рис. 78

циональны его высотам, и, значит, их отношения известны. Поэтому можно построить произвольный треугольник, подобный данному, а затем, применив соответствующее подобие, добиться равенства высот данным.

33. Возьмем произвольный квадрат $ABCD$ и проведем через его вершины B и C прямые, образующие с прямой AD углы, равные углам при основании данного треугольника. В результате квадрат будет вписан в треугольник, подобный данному. Подобие, переводящее построенный треугольник в данный, переведет построенный квадрат в искомый.

34. Карты центра города на разных сторонах листа подобны. Подобие, переводящее одну карту в другую, имеет единственную неподвижную точку. В этой точке и следует проколоть карту.

39. Если $AC = BC$, искомая линия будет осью симметрии треугольника. В результате соответствующего аффинного преобразования она перейдет в медиану CC' (рис. 77).

40. Сначала предположим, что тругольник ABC правильный. Тогда точки A', B', C' переходят друг в друга при поворотах вокруг центра треугольника ABC на угол $\pi/3$, т. е. $A'B'C'$ — правильный треугольник с тем же центром (рис. 78). При аффинном преобразовании центр правильного треугольника переходит в центр тяжести данного треугольника.

41. В правильном треугольнике эти три прямые совпадают с его осями симметрии, следовательно, в общем случае они совпадут с медианами данного треугольника. Отметим еще несколько свойств описанной конфигурации. Занумеруем прямые, соединяющие вершины треугольника с точками на противоположных сторонах, цифрами 1—6 и обозначим точку пересечения прямых i и j через P_{ij}. Тогда треугольники $P_{14}P_{25}P_{36}$ и $P_{16}P_{23}P_{45}$ гомотетичны данному треугольнику относительно его центра тяжести,

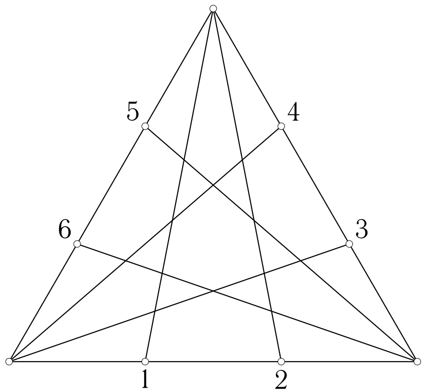

Рис. 79

стороны шестиугольника $P_{13}P_{46}P_{15}P_{24}P_{35}P_{26}$ параллельны сторонам данного треугольника, а прямые, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в его центре тяжести (рис. 79). Доказательства этих свойств полностью аналогичны решению задачи.

42. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной 1. Тогда $AA' = BB' = CC' = \sqrt{7}/3$. Обозначим точки пересечения прямых AA' и BB', BB' и CC', CC' и AA' через C'', A'', B''. Треугольники $A'C''B$ и $B'CB$ подобны с коэффициентом $k = \dfrac{A'B}{B'B} = 1/\sqrt{7}$. Следовательно, $BC'' = 1/\sqrt{7}$, $B'A'' = C''A' = 1/3\sqrt{7}$, $A''C'' = C''B'' = B''A'' = 1/\sqrt{7}$, т. е. площадь треугольника $A''B''C''$ в 7 раз меньше площади треугольника ABC (рис. 80). Это отношение не меняется при аффинных преобразованиях, т. е. остается верным для любого треугольника.

45. Пусть данные прямые пересекаются в точке O. Переведем прямую OP в бесконечно удаленную. Тогда четырехугольник $ACDB$ будет параллелограммом, а точка пересечения его диагоналей AD и BC будет лежать на прямой, параллельной данным и отстоящей от них на равное расстояние (рис. 81).

46. Переведем прямую q в бесконечно удаленную. Тогда прямые UA и UB, VA и VB станут параллельными, а прямые MN и AB перейдут в диа-

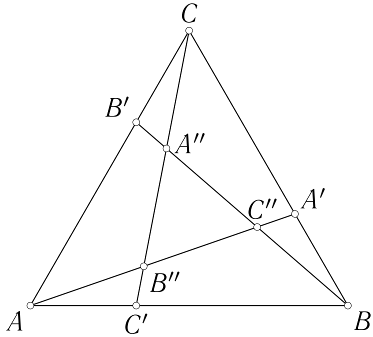

Рис. 80

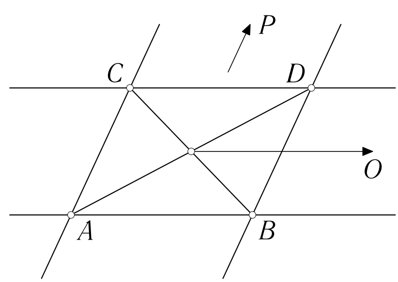

Рис. 81

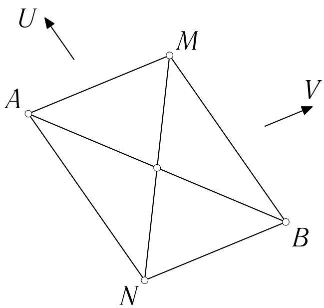

Рис. 82

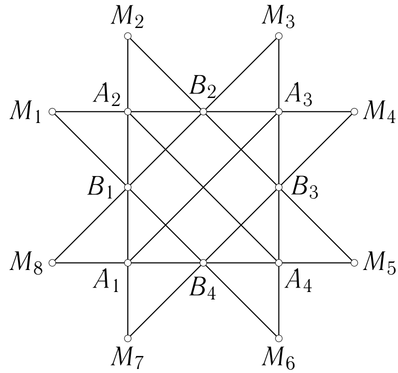

Рис. 83

гонали параллелограмма $AMNB$. Очевидно, что точкой их пересечения всегда будет середина отрезка AB (рис. 82).

47. Переведем $A_1A_2A_3A_4$ в квадрат. Тогда точки P, Q перейдут в бесконечно удаленные, а прямые NP, NQ будут параллельны сторонам квадрата. Поэтому B_1, B_2, B_3, B_4 будут серединами сторон, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8 — вершинами восьмиугольника со сторонами, равными и параллельными сторонам квадратов $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ (рис. 83). Все утверждения задачи теперь легко проверяются.

50. Так как, зная двойное отношение четырех точек, можно по трем из них однозначно построить четвертую, вершина E данного пятиугольника однозначно строится по четырем остальным. Переведем A, B, C, D в четыре последовательные вершины правильного пятиугольника. Непосредственно вычисляется, что в правильном пятиугольнике двойные отношения точек на диагоналях равны данным в задаче. Поэтому точка E совпадет с пятой вершиной пятиугольника. Отсюда следует, что все пять двойных отношений равны.

51. Пусть A, B, C, D — изображения четырех последовательных столбов на рисунке. Тогда $(AB;\, CD) = \dfrac{(10+6)\cdot(6+3)}{(10+6+3)\cdot 6} = \dfrac{24}{19}$. Но двойное отношение четырех равноотстоящих точек равно $\dfrac{2\cdot 2}{3\cdot 1} = 4/3$. Следовательно, на рисунке допущена ошибка.

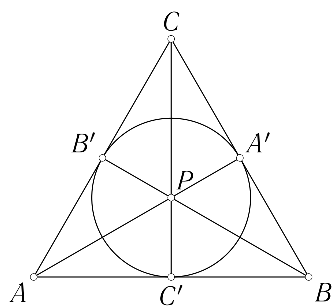

Рис. 84

54. Пусть A', B', C' — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB, а P — точка пересечения прямых AA' и BB'. Спроектируем P в центр окружности. Тогда AA' будет биссектрисой и высотой треугольника ABC, т. е. $AB = AC$. Аналогично $AB = BC$. Следовательно, треугольник ABC правильный, и точки C, C', P лежат на одной прямой (рис. 84).

55. Если перевести точку P пересечения прямых A_0A_1 и B_0B_1 в центр окружности, то треугольник $A_0B_0C_0$ станет правильным, точки A_1, B_1, C_1 перейдут в середины его сторон, а треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ будут симметричны $A_1B_1C_1$ и $A_0B_0C_0$ относительно P. Поэтому соответствующие стороны всех четырех треугольников будут параллельны, откуда и следует утверждение задачи. Отметим, что по теореме Дезарга соответ-

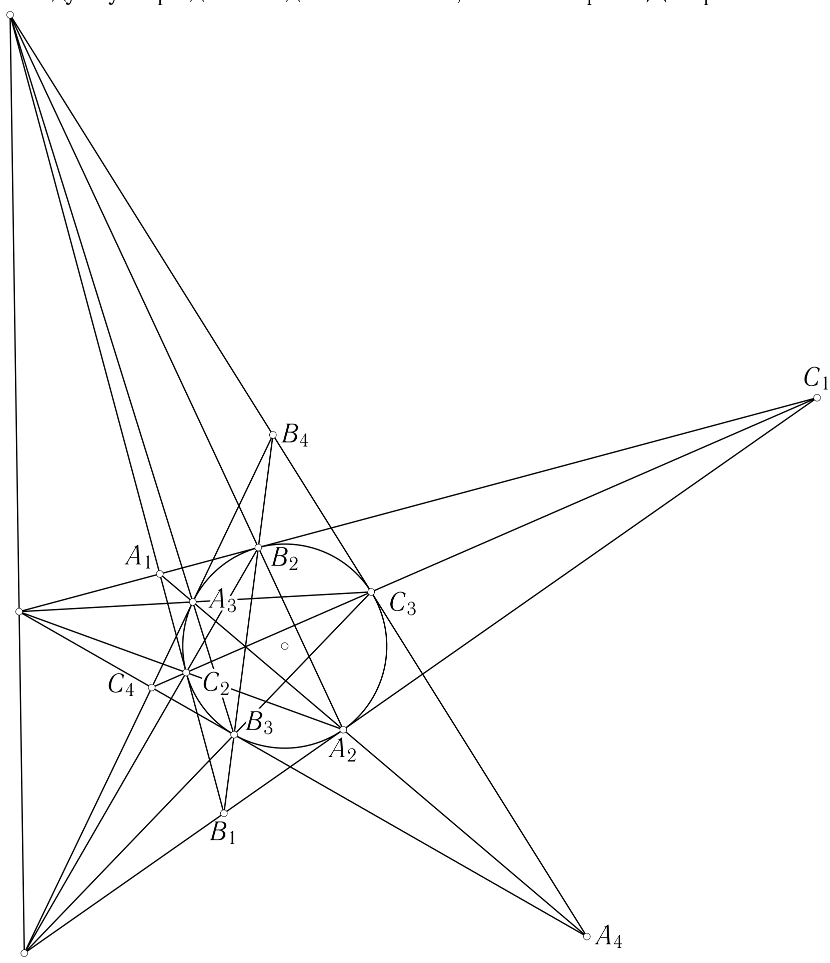

Рис. 85

ствующие вершины всех треугольников лежат на трех прямых, пересекающихся в точке P (рис. 85).

56. Спроектируем точку R пересечения диагоналей четырехугольника в центр окружности. Тогда четырехугольник превратится в прямоугольник, а точки P и Q будут точками бесконечно удаленной прямой, соответствующими двум перпендикулярным направлениям. Для завершения доказательства осталось заметить, что в данную окружность можно вписать бесконечное множество прямоугольников с заданными направлениями сторон.

57. Спроектируем точку пересечения диагоналей вписанного четырехугольника в центр окружности. Тогда вписанный четырехугольник перейдет в прямоугольник, а соответствующий описанный четырехугольник — в ромб и утверждение задачи будет очевидно. Отметим, что это утверждение является также предельным случаем теоремы Брианшона, получающимся при стремлении двух противоположных сторон шестиугольника к нулю, или задачи 52 при стремлении друг к другу точек A_1 и A_2, A_3 и A_4 (рис. 86).

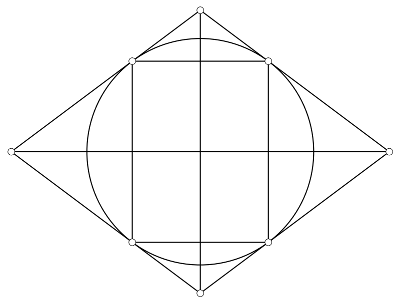

Рис. 86

58. Спроектируем точку пересечения диагоналей четырехугольников в центр окружности. Тогда описанный шестиугольник перейдет в ромб, а вписанный — в прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям ромба (рис. 86).

63. Пусть ABC — данный треугольник, A', B', C' — точки касания его сторон с вписанной окружностью, O — центр окружности. Внешняя биссектриса угла C перпендикулярна прямой OC, поэтому при полярном соответствии относительно вписанной окружности ее полюс лежит на OC. С другой стороны, он должен лежать на поляре точки C, т. е. на прямой $A'B'$. Таким образом, полюсом биссектрисы будет точка пересечения прямых OC и $A'B'$, или середина отрезка $A'B'$ (рис. 87). Так как точка C' является полюсом прямой AB, полярой точки пересечения прямой AB и внешней биссектрисы угла C будет медиана треугольника $A'B'C'$. Аналогично полярами двух других

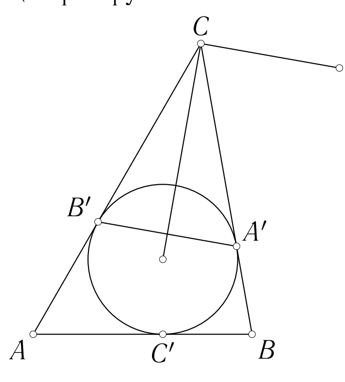

Рис. 87

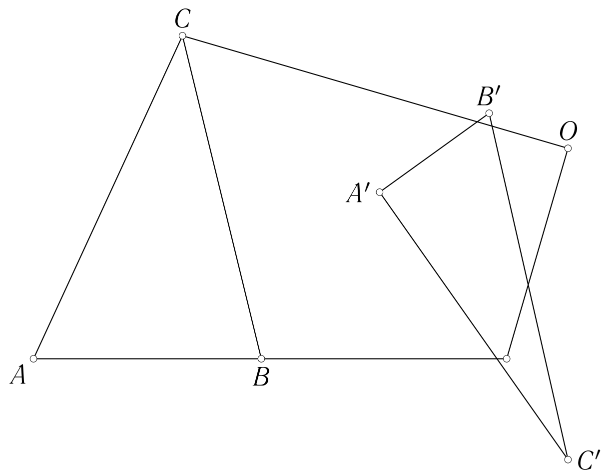

Рис. 88

точек будут две другие медианы этого треугольника, и, следовательно, все три точки лежат на поляре центра тяжести треуольника $A'B'C'$.

64. Пусть при полярном соответствии относительно некоторой окружности с центром O сторонам AB, BC, CA данного треугольника соответствуют точки C', A', B'. Поляры точки C и любой точки, лежащей на прямой, проходящей через O перпендикулярно OC, перпендикулярны. Но полярой точки C будет прямая $A'B'$, а поляра любой точки прямой AB проходит через C'. Поэтому полярой точки пересечения прямой AB и перпендикуляра к OC будет высота треугольника $A'B'C'$. Полярами двух других таких точек также будут высоты треугольника $A'B'C'$, следовательно, все три точки лежат на поляре его ортоцентра (рис. 88).

65. По теореме Дезарга точки пересечения соответствующих сторон треугольников лежат на одной прямой, значит, прямые, соединяющие их полюса, пересекаются в одной точке.

66. Нетрудно убедиться, что двойное отношение четырех прямых выражается через синусы углов между ними. С другой стороны, двойное отношение полюсов данных прямых равно двойному отношению прямых, соединяющих их с центром окружности, которые перпендикулярны данным. Но синусы углов с перпендикулярными сторонами равны, что и доказывает утверждение задачи (рис. 89).

72. Если данные окружности пересекаются, искомая окружность должна проходить через точки их пересечения и образовывать с ними равные углы. Чтобы найти такую окружность, сделаем инверсию с центром в одной из точек пересечения. Тогда данные окружности перейдут в прямые, а ис-

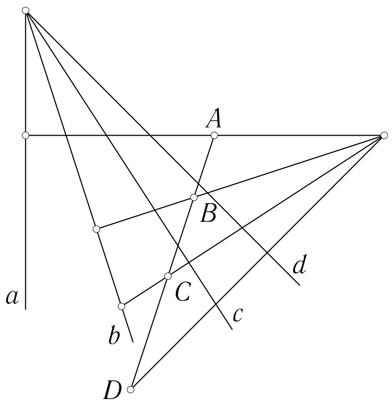

Рис. 89

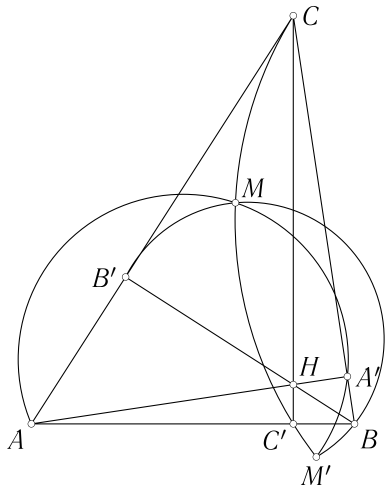

Рис. 90

комая окружность в биссектрису угла между ними. Задача имеет два решения, соответствующие биссектрисам двух смежных углов. Если окружности касаются, инверсия с центром в точке касания переводит их в параллельные прямые, а искомую окружность — в прямую, находящуюся от них на равном расстоянии. Если окружности не пересекаются, сделаем инверсию, переводящую их в концентрические. Искомая окружность также перейдет в концентрическую им окружность с радиусом, равным среднему геометрическому радиусов. В обоих последних случаях решение единственно.

73. Так как треугольники $HA'B$ и $HB'A$ подобны, $HA\cdot HA' = HB\cdot HB' = HC\cdot HC'$. Поэтому точка M', лежащая на прямой HM с противоположной стороны от H по сравнению с M и удовлетворяющая условию $HM\cdot HM' = HA\cdot HA'$, принадлежит всем трем окружностям (рис. 90). Преобразование, переводящее M в M', является композицией инверсии с центром H и соответствующим радиусом и центральной симметрии относительно H. Произвольная окружность, проходящая через точки M и M', переходит при этом преобразовании в себя, следовательно, окружность, проходящая через M, M', N, содержит точку N'.

74. Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через точки A и B. При инверсии относительно w эта окружность переходит в себя, следовательно, она перпендикулярна w. Таким образом, A и B являются общими точками некоторого множества окружностей, перпендикулярных w. Тогда A' и B' будут общими точками окружностей, перпендикулярных w', и, значит, будут переходить друг в друга при инверсии относительно w'.

75. Непосредственно проверяется, что любая окружность, пересекающая данную в диаметрально противоположных точках, переходит в себя при композиции инверсии относительно данной окружности и центральной симметрии относительно ее центра. Поэтому искомая окружность проходит через образы данных точек при этом преобразовании.

76. Прежде всего отметим, что если точки A' и B' являются образами точек A и B при инверсии с центром O и радиусом r, то $A'B' = \dfrac{AB\cdot r^2}{OA\cdot OB}$. Для доказательства достаточно заметить, что треугольники OAB и $OB'A'$ подобны. Применим теперь к данной конфигурации инверсию с центром M. Точки $A_1,\ldots,A_n$ перейдут при этом в точки $B_1,\ldots,B_n$, лежащие на одной прямой, так что $B_1B_n = B_1B_2 + \cdots + B_{n-1}B_n$. Применив приведенную выше формулу, получим утверждение задачи.

77. При инверсии относительно вписанной окружности стороны треугольника переходят в три окружности радиуса $r/2$, проходящие через ее центр. Известно, что окружность, проходящая через вторые точки их пересечения, в которую перейдет описанная окружность, имеет тот же радиус (рис. 91). Пусть расстояние от центра этой окружности до центра инверсии равно l. Тогда точки ее пересечения с линией центров находятся от центра инверсии на расстоянии $\dfrac{r}{2}-l$ и $\dfrac{r}{2}+l$, а соответствующие им точки описанной окружности — на расстояниях $d_1 = \dfrac{r^2}{r/2-l}$ и $d_2 = \dfrac{r^2}{r/2+l}$. Соответственно $R = \dfrac{d_1+d_2}{2}$, $d = \dfrac{d_1-d_2}{2}$, и формула Эйлера проверяется непосредственно.

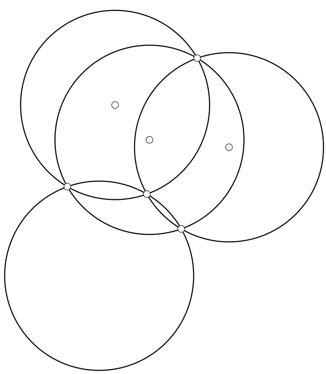

Рис. 91

78. Окружность с центром O и радиусом OA' касается трех данных окружностей в точках A', B', C'. При инверсии относительно этой окружности данные окружности перейдут в прямые, касающиеся ее в этих точках, точки A, B, C — в точки пересечения этих прямых, а окружности, описанные вокруг треугольников OAA', OBB', OCC', — в прямые, соединяющие вершины полученного треугольника с точками касания его сторон с вписанной окружностью. Эти три прямые пересекаются в одной точке.

79. Стороны $K'L'$ и $M'N'$ четырехугольника, в который инверсия переводит черырехугольник $KLMN$, являются образами окружностей, описанных вокруг треугольников OKL и OMN. Но эти окружности построены как

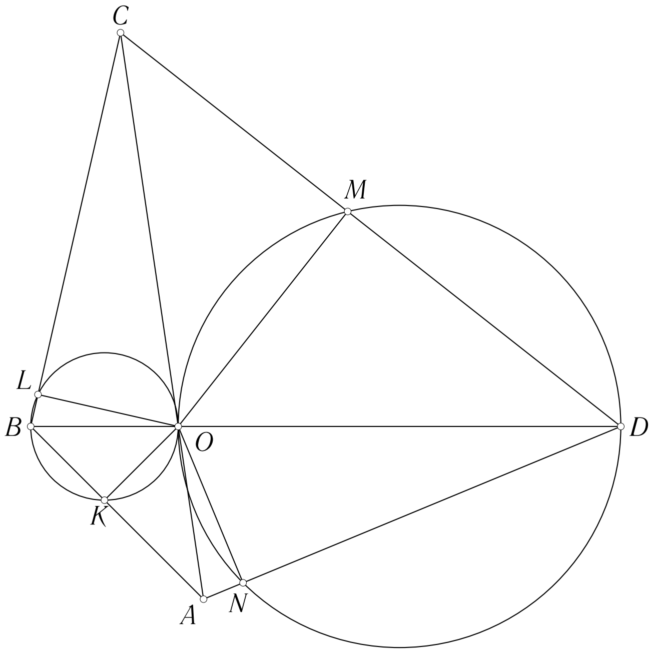

Рис. 92

на диаметрах на отрезках OB и OD и, следовательно, касаются друг друга в точке O (рис. 92). Поэтому их образами будут параллельные прямые.

98. Рассмотрим сначала аффинное преобразование, сохраняющее ориентацию. Его можно представить как композицию сжатия к прямой и подобия. Исследуем операцию сжатия к прямой с коэффициентом k. Если прямая, к которой производится сжатие, является осью OX, то точка z' лежит на отрезке, соединяющем точки z и $\overline{z}$, и делит его в отношении $\frac{k-1}{k+1}$, значит, $z' = \frac{(k+1)z+(k-1)\overline{z}}{2k}$. В общем случае в это выражение вместо z надо подставить tz, где t — комплексное число с единичным модулем и аргументом, равным углу между прямой сжатия и действительной осью. Применив затем преобразование подобия, получим искомое выражение, причем $|a|>|b|$. Если преобразование меняет ориентацию, проведем сначала симметрию относительно OX. Тогда z заменится на $\overline{z}$, и получится искомое выражение, причем $|a|<|b|$.

99. Согласно теореме 1 существует круговое преобразование, переводящее A, B, C в A', B', C'. Представив его в виде композиции инверсии и движения, найдем искомую инверсию.

100. Согласно теореме 2 у всех параллелограммов, получаемых из

$ABCD$ круговыми преобразованиями, совпадают отношение сторон и угол между ними, т. е. все они подобны. С другой стороны, взяв произвольный параллелограмм с нужными соотношениями сторон и углом, можно построить круговое преобразование, переводящее в его вершины точки A, B, C, D. Представив это преобразование в виде композиции инверсии и движения, найдем искомую инверсию.

101. Проведем инверсию, переводящую четырехугольник $ABCD$ в параллелограмм. Так как четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, этот параллелограмм будет прямоугольником. Тогда точки E и F будут симметричны точке M относительно осей симметрии прямоугольника, а точке N — относительно его центра. Четырехугольник $MENF$ будет прямоугольником со сторонами, параллельными сторонам четырехугольника $ABCD$, т. е. точки M, E, N, F лежат на окружности. Интересно также отметить, что окружности, описанные около треугольников AMC и BMD, пересекаются в точке N', являющейся образом точки N при инверсии относительно окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$.

Литература

1. *Яглом И. М.* Геометрические преобразования, Т. 1,2. — М.: Гостехиздат, 1955–1956.
2. *Коксетер Г. С. М.* Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.
3. *Шарыгин И. Ф.* Задачник по геометрии. — М. Дрофа: 1996.
4. Приложение к журналу «Квант». 1995, вып. 1, 6; 1997, вып. 1, 3, 5; 1998, вып. 1.
5. *Радемахер. Г., Теплиц. О.* Числа и фигуры. — М.: Наука, 1966.
6. *Смогоржевский А. С.* Линейка в геометрических построениях. — М.: Гостехиздат, 1956.
7. *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.
8. *Норден А. П.* Элементарное введение в геометрию Лобачевского. — М.: ГИТТЛ, 1953.
9. *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. — М.: МЦНМО, 2000.

Оглавление